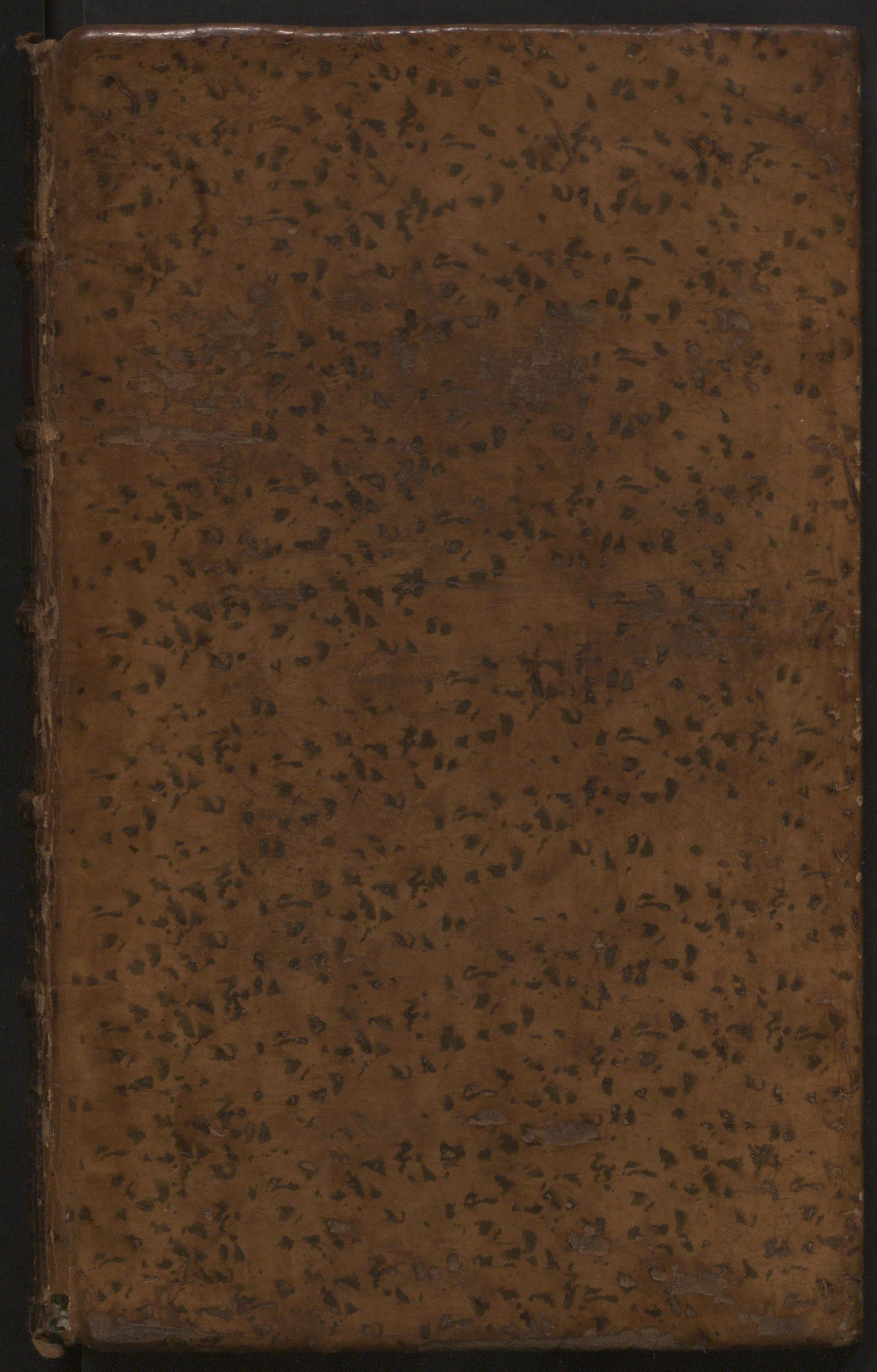
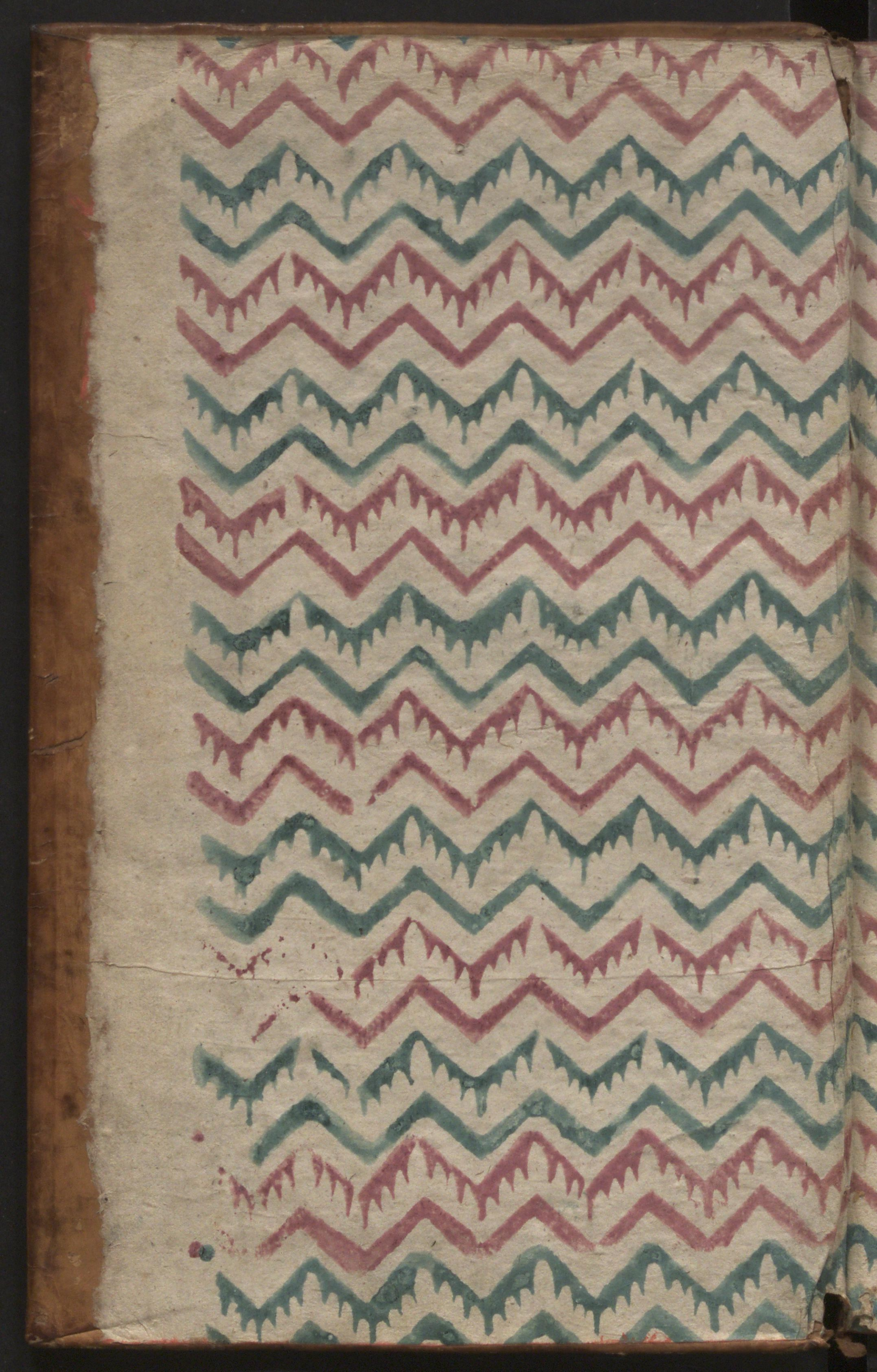
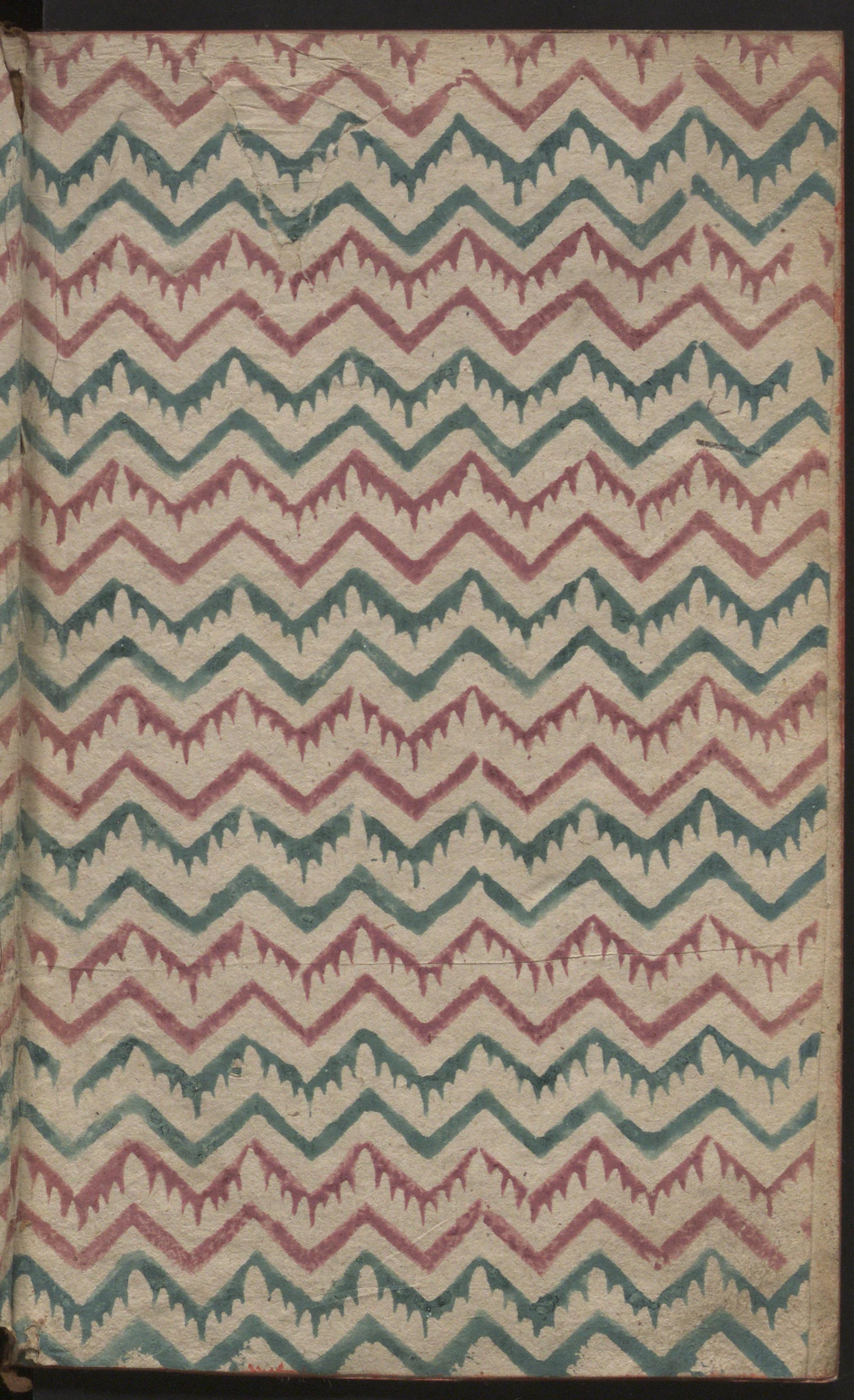
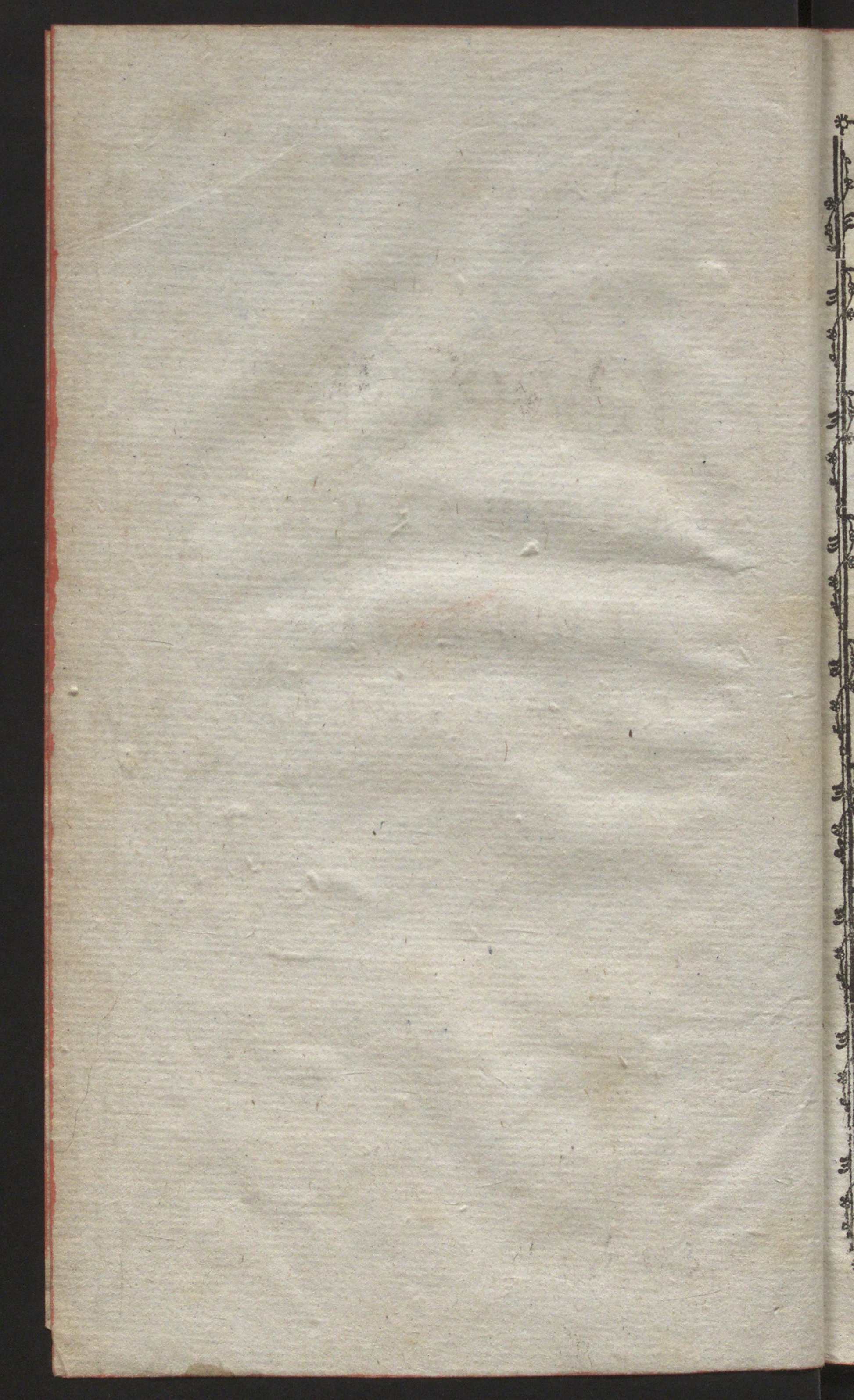






КУРСЪ
МАТЕМАТИКИ
ТОМЪ II
ГЕОМЕТРІЯ.



ТЕОРЕТИЧЕСКАГО И ПРАКТИЧЕСКАГО КУРСА ЧИСТОЙ МАТЕМАТИКИ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

Содержащая въ себѣ

Полную, сокращенную и особливо практическую Геометрїю.

въ пользу и употребленїе

ЮНОШЕСТВА

и упражняющихся въ математикѣ.

СОЧИНЕННАЯ

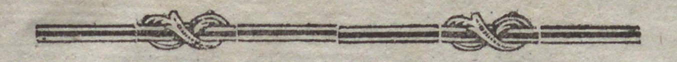
Артиллерїи Штыкъ-Юнкеромъ и партикулярнымъ въ Москвѣ благороднаго юношества учителемъ математики

Ефимомъ Войтяховскимъ.

Съ Указнаго дозволенїя

ВЪ МОСКВѢ

Печатано въ вольной типографїи у Хр. Клаудїя, 1787 года.



РОСПИСАНІЕ МАТЕРІЯМЪ.

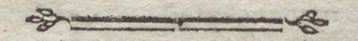
Находящимся во второй части теоретическаго и практическаго курса чистой математики.

Из-

Полная геометрїя содержитъ въ себѣ всѣ предложенїя не исключая ни одного.

Сокращенная геометрїя, опредѣляется тѣми предложенїями, которыя печатаны обыкновенными буквами, исключая всѣ предложенїя мѣлкими буквами печатанныя, также превращенїе, сложенїе, вычитанїе, увеличиванїе и дѣленїе плоскостей и тѣлъ.

Практическая геометрїя, какъ полная такъ и сокращенная, заключаетъ въ себѣ опредѣленїя и задачи, исключая прочїя предложенїя и доказательства.





О ГЕОМЕТРІИ ВООБЩЕ.

I. *Определенiе.* *Геометрiя* или *землемѣрiе* есть наука о величинахъ имѣющихъ пространство или протяженiе, въ длину, ширину и глубину или высоту, и о измѣренiи ихъ.

Протяженныхъ величинъ суть три рода.

2. *Определенiе.* *Линѣя* есть величина имѣющая протяженiе въ одну только длину безъ ширины и глубины какъ *ab*. *Поверьхность* есть *пространство* имѣющее два измѣренiя, въ длину и ширину безъ глубины какъ *abcd*. И на конецъ *тѣло* или *корпусъ* есть пространство имѣющее три измѣренiя, въ длину, ширину и глубину или высоту, какъ фигура *B* значитъ. No I. ф. I. ф. 2. ф. 3.

3. *Определенiе.* *Точка математическая* есть безконечно малое пространство, которому ни какого измѣренiя не полагается; такъ что онную ни самымъ острымъ концемъ иглы, въ подлинномъ ея видѣ на бумагѣ, или на другой какой нибудь поверьхности изобразить не можно.

4. *Определенiе.* Поверьхностiю вообще называется величина длину и ширину

только имѣющая; а *прямая поверьхность* или *плоскость* есть та, которой всѣ точки одна въ разсужденїи другой не унижаются и не возвышаются, но въ равномъ расположенїи находятся; какъ на примѣръ точки составляющїя поверьхность гладкой доски. Въ противномъ же случаѣ будетъ поверьхность кривая.

Примѣчанїе. I. Изъ втораго опредѣленїя видно, что всякое сущее въ свѣтѣ тѣло имѣетъ при себѣ три измѣренїя; однако жь можно разсуждать о каждомъ особенно не касаясь прочихъ, или о двухъ вкупѣ исключая третїе измѣренїе: на примѣръ ежели говорится о разстоянїи двухъ городовъ, то разсуждается объ одной только длинѣ дороги, опредѣляющей разстоянїе тѣхъ мѣстъ не думая о ея ширинѣ. Естьли разсуждается о пространствѣ поля, то принимается въ разсужденїе два только измѣренїя въ длину и ширину онаго, не помышляя о толстотѣ земли. Когда жь разсматривается толстота, на прим. каменной стѣны или другаго какого тѣла, то разумѣется о всѣхъ трехъ измѣренїяхъ, то есть о длинѣ, ширинѣ и высотѣ онаго.

Примѣч. II. Въ разсужденїи сего геометрїя раздѣляется на три части, изъ коихъ первая разсуждаетъ о свойствѣ линѣй, и о происхожденїи изъ оныхъ разныхъ

ныхъ геометрическихъ фигуръ, и называется *Лонгиметрїею.* *Планиметрїею* именуется та часть геометрїи, которая учитъ измѣрять поверьхности разныхъ геометрическихъ фигуръ. *Стереометрїя* есть часть геометрїи разсуждающая о измѣренїи тѣлъ.

О ЛИНѢЯХЪ И УГЛАХЪ.

5. *Опредѣл.* *Линѣи происходятъ отъ движенїя точки.* На примѣръ, когда точка, какую въ § 3 мъ описали, будетъ двигаться отъ одного мѣста *a* къ другому *b*, то слѣдъ ея, которой она по себѣ оставитъ, будетъ линѣя. Посему всякую линѣю воображать можно составленною изъ безконечнаго числа точекъ; слѣдственно и концы линѣи должны быть точки. ф. 4.

6. *Опредѣл.* *Прямая линѣя ab* называется та, которая происходитъ отъ прямаго движенїя точки, съ одного мѣста *a* къ другому *b*. ф. 4.

Кривая линѣя acb есть та, которая раждается отъ непрямаго движенїя точки, съ одного мѣста *a* до другаго *b*.

Ломаная линѣя adeb есть та, которая составляется изъ нѣсколькихъ прямыхъ линѣй, имѣющихъ не прямое положенїе.

Слѣдствїе I. Изъ того явствуетъ, что прямая линѣя *ab*, есть кратчайшая изъ всѣхъ линѣй, кои между двумя точками

a и *b* проведены быть могутъ; и потому оная истинное ихъ разстоянïе.

Слѣдствïе II. Между двухъ точекъ *a* и *b*, болѣе одной прямой линѣи провесть не можно, а кривыхъ линѣй между тѣхъ же точекъ, безконечное множество провести можно; поелику по обѣ стороны точекъ *a* и *b*, находится безмѣрное пространство. Естьли жь двѣ линѣй между двумя точками умѣщаются такъ, что одна другую покрываетъ, то сïи между собою равны.

Слѣдствïе III. Положенïе прямой линѣй
ф. 5. опредѣляютъ двѣ точки *a* и *b*; ибо отъ одной точки *a*, провесть можно безконечное множество не опредѣленныхъ прямыхъ линѣй; какъ на примѣръ *ab*, *ac*, *ah* и прочая, а ежели дастся другой предѣлъ какъ на примѣръ *b*, то прямая линѣя опредѣлится чрезъ точки *a* и *b*, положенïе жь кривой линѣи не инако опредѣлится, какъ чрезъ множество точекъ.

Слѣдс. IV. Двѣ прямыя линѣи взаимно пересѣкутся только въ одной точкѣ; ибо каждая изъ нихъ происходитъ отъ движенïя точки, слѣдовательно и взаимное ихъ сѣченïе будетъ точка.

7. *Опредѣл.* Для измѣренïя линѣй берется линѣя жь опредѣленной величины за единицу, какъ то *сажень*, *футъ*, *дюймъ* и пр: и означаются сажени (o), футы (′), дюймы (″) и такъ далѣе. Для способности

въ

въ выкладкахъ геометрическихъ, всякая сажень раздѣляется на 10 равныхъ частей, изъ коихъ каждая называется футъ; футъ раздѣляется на 10 дюймовъ, дюймъ на 10 линѣй и проч. и въ разсужденiи такого раздѣленiя именуется *мѣрою геометрическою.*

8. *Опредѣл.* *Линѣя круговая* есть изъ всѣхъ кривыхъ линѣй въ геометрiи самая легчайшая и нужнѣйшая, описывающаяся концемъ *b* прямой линѣи *ab*, во время ея обращенiя около не подвижной точки *a*. Которой происхожденiе есть слѣдующее: когда вообразимъ себѣ, что прямая линѣя *ab* будетъ обращаться около одного своего конца не подвижно пребывающаго въ точкѣ *a* до тѣхъ поръ, пока придетъ опять на прежнее свое мѣсто, то другой ея конецъ *b*, во время сего обращенiя опишетъ на плоскости помянутую кривую линѣю *bdceb*. Пространство опредѣленное сею кривою линѣею называется *кругъ*. Не подвижная точка *a* центръ (средоточiе) круга. Круговая линѣя *bdceb окружность*. Прямая линѣя *ab* обратившаяся около точки *a*, называется *радiусъ* или *полупоперешникъ*. Прямая линѣя *bae* отъ одной точки *b* окружности къ другой *e* чрезъ центръ проведенная, называется *дiаметръ* или *поперешникъ*. Линѣя *cd* проведенная не чрезъ центръ, концами окружности круга касающаяся называется *хорда* (*тетива*). ф. 6.

Часть *dc* или *dbfec* окружности круга, называется *дуга.* Изъ сего видно, что кругъ есть пространство на плоскости опредѣленное такого свойства кривою линѣею (*окружностью*), что всякая оной точка отъ центра *a* въ равномъ разстоянiи находится.

Слѣдс. Изъ того слѣдуетъ, что въ кругѣ всѣ радiусы равны; также и всѣ дiаметры равны, поелику каждой дiаметръ равенъ суммѣ двухъ радiусовъ.

9. ТЕОРЕМА. *Всякой кругъ и окружность онаго, дiаметромъ eb разрѣзывается на двѣ равныя части.*

Доказательство. Представимъ себѣ, что часть круга *efb* съ дiаметромъ *eb*, положится на другую часть *ecdb*, то всѣ точки части окружности *efb*, не премѣнно упадутъ на всѣ точки другой части *ecdb* (8), посему пространство части круга *efb*, закроетъ совершенно пространство части круга *bdce*; слѣдовательно оныя части равны между собою, и каждая равна половинѣ круга. Также и часть окружности *efb* равна части окружности *bdce.* Но есть ли кто скажетъ, что точка *f* упадетъ внѣ или внутрь части круга *ecdb*, въ такомъ случаѣ всѣ точки окружности круга *efb*, уже не будутъ въ равномъ разстоянiи отъ центра, что будетъ положенiю противно.

Слѣдс.

Слѣдс. Изъ сего непосредственно видно, что на всякой прямой линѣе *ab* изъ какой нибудь точки на пр. *a*, всякимъ радїусомъ опишется полкруга.

10. *Опредѣл.* Геометры раздѣляютъ окружность всякаго круга на 360 равныхъ частей *) изъ коихъ каждая называется *градусъ*, каждой градусъ на 60 равныхъ частей называемыхъ *минуты*, каждую минуту на 60 *секундъ*, секунду на 60 *терцїй* и такъ далѣе. Градусы означаются (°) какъ сажени, минуты (′) какъ футы, секунды (″) какъ дюймы и проч. на примѣръ 7°, 28′, 32″, 52‴, значитъ 7 градусовъ, 28 минутъ, 32 секунды, 52 терцїи.

Примѣчанїе. Понеже градусъ есть $\frac{1}{360}$ часть окружности круга: но окружности круговъ могутъ быть различной величины, посему и градусы одинакой величины быть не могутъ; слѣдовательно градусъ есть количество не опредѣленное какъ на примѣръ футъ или сажень, но такая величина, которая относится къ своей окружности, о чемъ прилѣжнѣе примѣчать надлежитъ.

11. *Опредѣленїе.* Когда двѣ линѣи *ab* и *ac* концами сойдутся въ одну точку *a*; то взаимное оныхъ наклоненїе или ихъ отверстїе называется *плоскостной уголъ*. Линѣи *ab* и *ac* называются *боками угла*. Точка *a* именуется *верьхъ угла*. ф. 7.

*) Причина сего раздѣленїя есть та, что число 360 на многїя равныя части раздѣлиться можетъ.

Углы въ разсужденiи боковъ раздѣляются на три рода.

ф. 7. 12. *Опредѣл.* *Прямолинѣйной* уголъ *bac* есть тотъ, котораго бока прямыя линѣи.
ф. 8. *Криволинѣйной*, коего бока кривыя линѣи какъ *edf*. *Смѣшеннолинѣйнымъ* угломъ на-
ф. 9. зывается, которой состоитъ изъ прямой и кривой линѣи какъ *gfh*.

Примѣч. Уголъ означается одною ли-
ф. 10. терою, у верьха угла написанною, на примѣръ *a*. А когда нѣсколько угловъ будутъ имѣть общiи верьхъ *a*; въ такомъ случаѣ означается тремя, какъ *bag*, изъ коихъ средняя всегда означаетъ верьхъ угла.

13. ТЕОРЕМА. *За мѣру угла берется дуга bd изъ верьха его a произвольнымъ радiусомъ описанная.*

Доказ. Ибо представить можно, что
ф. 10. уголъ происходитъ равно какъ кругъ, то есть, ежели вообразимъ себѣ что бокъ *ad* угла *dab* положенъ на бокъ *ab*, и точка *d* находится въ точкѣ *b*, потомъ не отдѣляя одного своего конца отъ точки *a*, другимъ *d* начнетъ отдвигаться; то точка *d* будетъ описывать дугу *bged*, и чѣмъ далѣе отъ линѣи *ab* отходить будетъ, тѣмъ и дуга *bged* будетъ по степенно увеличиваться, по сему дуга *bged* опредѣляетъ величину отверстiя угла *bad*; слѣдовательно вмѣсто отверстiя угла *bad*,

можно

можно принять за мѣру дугу *bd*, изъ верьха его произвольнымъ радїусомъ описанную.

Слѣдс. I. Понеже мѣра угла есть часть окружности круга, того ради сколько дуга *bd* или *cf* содержитъ въ себѣ градусовъ, минутъ и проч. столько оныхъ и уголъ *bad* имѣть будетъ; слѣдовательно величина угловъ познается изъ содержанїя дугъ къ цѣлымъ окружностямъ круговъ.

Слѣдс. II. Мѣра угловъ не зависитъ отъ длины боковъ, но отъ наклоненїя, которое дѣлаютъ линѣи уголъ составляющїя. 1е, углы будутъ равны, которыхъ наклоненїя боковъ между собою равны, то есть, когда одинъ уголъ съ другимъ такъ сходствуетъ, что ежели положа верьхъ одного на верьхъ другаго, бока одного упадутъ на бока другаго не смотря на неравенство боковъ, тогда углы будутъ равны между собою. 2е, уголъ *bad* измѣряется дугою *bd*, также и дугою *cf*, изъ коихъ каждая имѣетъ одно число градусовъ отъ своей окружности (§ 13); слѣдовательно величина угла не перемѣнится, когда его бока *ac* и *af* будутъ корочѣ или болѣе нежели *ab* и *ad*.

Примѣч. Понеже уголъ увеличиться и уменьшиться можетъ (§. 13): то безъ всякаго сомнѣнїя углы между количествами почитать должно; съ тою разностїю, что они въ разсужденїи различной вели-

чины градусовъ, особой родъ количествъ составляютъ, и потому отмѣннымъ образомъ измѣряются.

14. *Опредѣл.* *Прямой уголъ bac* есть
ф. II тотъ, котораго мѣра четверть окружности *cfe*. *Острой уголъ cad* есть тотъ, коего мѣра дуга *cf* менѣе четверти окружности. *Уголъ gad тупой*, котораго мѣра дуга *gef* болѣе четверти окружности; посему всякой прямой уголъ имѣетъ 90 град. острой меньше, а тупой больше 90 град.

15. *Опредѣл.* *Смѣжные углы* называются тѣ, кои имѣютъ общїй верьхъ *a* и общїи бокъ *ad*, какъ *ead* и *cad*. или *gad* и *dac*.

16. ТЕОРЕМА. *Ежели нѣсколько линѣй ab, ad и проч. сойдутся въ одну точку a лѣжащую на прямой линѣе cg, то сумма всѣхъ угловъ будетъ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град.*

Доказательство. Изъ точки *a* какъ изъ центра на прямой линѣе *gac* опиши полкруга; то мѣра всѣхъ угловъ *cad*, *dab*, и *bag*, будетъ равна половинѣ окружности круга (§ 13), которая содержитъ въ себѣ 180 град. по сему и сумма всѣхъ угловъ, равна двумъ прямымъ угламъ (§ 14) или 180 град.

Слѣдс. Ежели въ точку *a*, упадетъ одна линѣя *ab* такъ, что смѣжные углы

gab

gab и *bac* будутъ равны, то каждой изъ нихъ будетъ равенъ прямому. Ибо дуга *ge* = *cfe*, равна четверти окружности круга.

17. ТЕОРЕМА. *Ежели нѣсколько линѣй ac, cn, cb и проч. сойдутся въ одну точку c; то сумма всѣхъ угловъ, будетъ равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.*

Доказ. Изъ точки *c* взятой за центръ опиши кругъ. Общїи верьхъ угловъ будетъ находиться въ точкѣ *c*; чего ради содержащїяся между каждыми двумя боками *ac*, *ce*, *cd*, *cb* и *cn* дуги, будутъ мѣрою тѣхъ угловъ (13), кои вообще составляютъ цѣлую окружность круга, содержащую въ себѣ 360 град. или четыре прямыхъ угла (§14). ф. 12.

18. *Опредѣл. Уголъ cad дополненїемъ угла dab къ прямому* углу *cab* называется тотъ, которой съ мѣжнымъ угломъ *bad* составляетъ 90 град. Уголъ *cad дополненїе* угла *dag до двухъ прямыхъ угловъ* или 180 град. есть тотъ, которой съ смѣжнымъ угломъ *dag* составляетъ 180 град. ф. 11.

Слѣдс. I. Того ради дополненїе остраго угла *bad* къ прямому *bac*, есть уголъ острой *dac*. Дополненїе жъ до двухъ прямыхъ угловъ или 180° остраго угла *cad*, тупой *gad*; а тупаго *gad*, острой *dac*; прямаго *gab* прямой *bac*.

Слѣд-

Слѣдс. II. Изъ сего явствуетъ, что дополненія равныхъ угловъ, равны между собою, и обратно, когда дополненія угловъ равны, то и дополняемыя углы равны между собою.

19. *Опредѣл.* Углы *противуположенные*
ф 13. *bac* и *dae* также *dac* и *bae* суть тѣ, коихъ бока *ab* и *ac* одного угла, находятся въ прямомъ положеніи противъ боковъ *ac* и *ad* другаго.

20. ТЕОРЕМА. *Углы m и n противуположенные, равны между собою.*

Доказ. Уголъ $m + y = 180$ град. и уголъ $y + n = 180$ град. (§. 16), посему $m + y = y + n$ (ариф. §. 30); а отнявъ отъ обоихъ количествъ величину y, останется уголъ $m = n$ (ариф. 34); такимъ же образомъ докажется что уголъ $a = y$.

21. *Опредѣл.* Перпендикулярная линѣя
ab есть та, которая падаетъ на другую
ф II. *gc* такъ, что съ обѣихъ сторонъ углы *gab* и *bac* будутъ равны, то есть когда каждой изъ сихъ будетъ уголъ прямой.

22. *Опредѣл.* *Параллельныя* или *равно-*
ф 14. *разстоящїя линѣи* *ab* и *cd* суть тѣ, кои будучи продолжены въ обѣ стороны, никогда сойтиться не могутъ, или тѣ между коими перпендикулярныя *ef* и *gh* къ параллельнымъ *ab* и *cd* равны.

О ФИГУРАХЪ, О РАВЕНСТВѢ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ, О СВОЙСТВѢ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХЪ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫХЪ ЛИНѢЙ, И О УГЛАХЪ РАЗНЫХЪ ФИГУРЪ.

23 *Опредѣл.* Фигурою называется пространство на плоскости линѣями, опредѣленное.

24 *Опредѣл.* Фигуры *прямолинѣйныя* суть тѣ, кои ограничиваются прямыми линѣями, какъ *А.* *Криволинѣйными* называются тѣ, которыя опредѣляются кривыми линѣями, какъ *В.* ф. 15. ф. 16.

Примѣчанїе. Всякая прямолинѣйная фигура столько имѣетъ угловъ, сколько боковъ въ фигурѣ находится; а чтобъ прямолинѣйная фигура пространство между предѣлами своими заключала, по крайней мѣрѣ три бока имѣть должна.

25. *Опредѣл.* Плоскїя прямолинѣйныя фигуры названїе свое получаютъ отъ числа боковъ или угловъ. Фигура окруженная тремя боками называется *треугольникъ*, четырмя *четвероугольникъ*, пятью боками ограниченная *пятїугольникъ* и такъ далѣе. Во общѣ фигуры плоскїя прямолинѣйныя больше нежели четыре бока имѣющїя, (полигонами) *многоугольниками* именуются.

Примѣч. Происхожденїе треугольника легко вообразить можно, ежели концы двухъ линѣй *ab* и *ac* уголъ составляющихъ ф. 17.

соединены,

соединены будутъ прямою линѣею *bc*; то произойдетъ треугольникъ *abc*.

26. *Опредѣл.* Треугольники въ разсужденіи ихъ боковъ и угловъ имѣютъ раз-
ф.17. личныя названія. *Равносторонный треугольникъ* *abc* есть тотъ, котораго всѣ бока между собою равны. *Равнобедрен-*
ф.18. *ный* *cdf*, котораго два бока *cd* и *fd* равны, а третій *cf* болѣе или менѣе одного изъ
ф.19. оныхъ. *Неравносторонный* *def*, коего всѣ три бока не равны. *Прямоугольный тре-*
ф.20. *угольникъ* *abe* есть тотъ, коего одинъ
ф.21. уголъ *a* прямый. *Тупоугольный* *ghf*, котораго одинъ изъ трехъ уголъ *ghf* тупый
ф.22. *Остроугольный* *ced*, котораго всѣ три угла острые. Въ прямоугольномъ тре-
ф.20. угольникѣ *abc*, бокъ *bc* лежащій противъ прямаго угла называется *діогональ*.

ф.23. 27. *Опредѣл.* *Параллелограмъ* *B* есть четвеосторонникъ, котораго противу лежащіе бока и углы равны, а когда въ параллелограмѣ всѣ углы будутъ прямые,
ф.24. тогда оной называется *прямоугольникомъ*, какъ *dm*. *Квадратъ* *abdc* такой четверо-
ф.25. сторонникъ, коего всѣ бока равны и углы прямые; а ежели въ четвеосторонникѣ
ф.26. всѣ бока и противулежащіе углы равны, то называется наклоненный *квадратъ* или *ромбъ*, какъ *G*. Четверосторонникъ коего
ф.27. только два противулежащіе бока *ad* и *bc* паралельны, называется *трапецїя*.

28. *Определ.* Во всякомъ четвероугольникѣ *abcd*, прямая линѣя *ac* соединяющая противулѣжащїе углы, называется *дїогональ* (поперешникъ). ф. 23. и 27.

Примѣч. Всякой четвероугольникъ означается четырмя литерами *abcd*, или двумя *a* и *c* означающими дїогональ четвеpосторонника.

29. *Определ.* Во всякомъ треугольникѣ *acd* или четвеpосторонникѣ *ac*, *основанѣемъ* называется та линѣя какъ здѣсь *ad*, на которую или на продолженѣе ея *dm* изъ противулежащаго угла *c* другая *cm* падаетъ перпендикулярно. Перпендикулярная жъ *cm* именуется *высота треугольника*, или четвероугольника. Верьхъ угла *c*, которой противуполагается основанїю называется *верьхъ фигуры*. ф. 27. и 28.

30. ТЕОРЕМА. *Два треугольника abc и def будутъ во всѣхъ частяхъ совершенно равны, когда два бока ab и bc и между ими уголъ abc, равны двумъ бокамъ de и ef и между ими углу def другаго треугольника.*

Доказ. Представь себѣ, что треугольникъ *abc* положенъ на треугольникъ *def* такимъ образомъ, что точка *b* упала на точку *e*, и бокъ *ab* упалъ на бокъ *de*: то въ разсужденїи равенства боковъ, точка *a* упадетъ на точку *d*; а для равенства ф. 29.

венства угловъ *abc* и *def*, бокъ *bc* упадетъ на *ef*, и точка *c* будетъ въ точкѣ *f*, бокъ *ac* упадетъ на *df* и его закроетъ; по сему треугольники *abc* и *def* другъ друга во всѣхъ частяхъ закроютъ; слѣдственно совершенно равны, посему уголъ $a = d$, $c = f$ и бокъ $ac = df$.

31. ТЕОРЕМА. *Когда бокъ ac и при немъ два угла a и c одного треугольника abc, равны боку df и при немъ двумъ угламъ d и f другаго треугольника def; такіе треугольники между собою во всѣхъ частяхъ совершенно равны.*

Доказ. Понеже $ac = df$: то ежели треугольника *abc*, бокъ *ac* положится на бокъ *df* такъ, что бы точка *a* упала на точку *d*, то точка *c* непремѣнно упадетъ въ точку *f*, и для равенства угловъ *a* и *c*, *d* и *f* бокъ *ab* долженъ будетъ упасть на *de*, и бокъ *bc* упасть на *ef* (13); слѣдовательно точка *b* упадетъ на точку *e*: но ежели кто скажетъ, что точка *b* не можетъ упасть на точку *e*, а упадетъ на другую какую нибудь на примѣръ *g*, тогда будетъ $dg = ab$, и проведя линѣю *gf*, будетъ уголъ $acb =$ углу *dfg*, что противно положенѣю; чего ради бокъ *dg* не можетъ быть равенъ боку *ba*, и точка *b* не можетъ упасть въ точку *g*. Также докажется и о всякой другой точкѣ *g*, которая будетъ ближе или далѣе отъ точки

ки e; слѣдовательно точка b непремѣнно упасть должна на точку e, при чемъ будетъ $ab = de$, $bc = ef$ и уголъ $b = e$.

32 ТЕОРЕМА. *Во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ abc, противъ равныхъ боковъ ac и bc, углы a и b равны между собою.*

Доказ. Представь себѣ мысленно, что изъ верьха c проведенною на основанïе ab линѣею cd, уголъ acb раздѣленъ на двѣ равныя части; отъ чего будетъ уголъ $acd = bcd$, бокъ $ac = bc$ по положенïю, и dc есть общïй бокъ треугольникамъ acd и dcb; слѣдовательно треугольники acd и dcb равны между собою (30); и уголъ $dac = dbc$, $adc = bdc$, линѣя $ad = bd$, по сему dc перпендикулярна къ ab (21). ф. 30

Слѣдс. Изъ сего явствуетъ, что во всякомъ равнобедренномъ треугольникѣ основанïе ab, перпендикуляромъ cd дѣлится на двѣ равныя части.

33. ТЕОРЕМА. *Ежели три бока треугольника abc, равны порознь тремъ бокамъ другаго треугольника gef, напримѣръ ab = gf, ac = ge, bc = fe; то такïе треугольники между собою во всѣхъ частяхъ будутъ равны.*

Доказ. Ежели треугольникъ gef весь приложить къ треугольнику abc такъ, чтобъ бокъ gf упалъ на бокъ ab, точка ф. 31.

g упалабы на точку a, и f на точку b, а точка e пусть будетЪ на примѣрЪ вЪ точкѣ d: то проведя линѣю dc, будетЪ $ad = ac$ и $bd = bc$ по положенїю, чего ради уголЪ $acd = adc$, и $dcb = bdc$ (32); по сему уголЪ ($acd + dcb$) $acb \overset{*}{=}$ ($adc + bdc$) adb (ариф. 33); слѣдовательно треугольникЪ $acb = adb$ (30): но треугольникЪ adb есть треугольникЪ gef по положенїю, слѣдовательно треугольникЪ $aeb = gef$. уголЪ $a = g$, $b = f$ и $c = e$.

34. ТЕОРЕМА. *Когда два бока ac и cb составляющїя острой уголЪ acb, прямоугольнаго треугольника abc, будутЪ равны бокамЪ ef и fg другаго треугольника egf; то такїе треугольники между собою во всѣхЪ частяхЪ равны.*

Доказ. ВообразимЪ себѣ, что треуголь-
ф. 32. никЪ egf приложенЪ кЪ треугольнику abc такЪ, что бокЪ ef упалЪ на bc, точка f на точку c, по сему и точка e упадетЪ на точку b: но какЪ углы abc и feg прямые; то точка g сЪ точкою a будутЪ вЪ прямой линѣе (21). ТреугольникЪ abc по

(*) Ежели вЪ какомЪ нибудь доказательствѣ какЪ здѣсь, разныя величины написаны будутЪ вЪ скобкахЪ не раздѣльно, будучи соединены знакомЪ равенства сЪ другими величинами; то сїе значитЪ что всѣ величины первой и второй части равны между собою. На пр. ab (cd)($adc + bdc$) $= ad$ ($apc + gmq$)(mg), значатЪ что $ab = ad = cd = mg = adc + bdc = apc + gmq$.

по (30) будетъ равенъ bcg; ибо уголъ $abc = cbg$ прямые, и для равнобедреннаго треугольника agc бокъ $ab = bg$ (32), bc общая: но треугольникъ bcg есть треугольникъ egf, слѣдовательно треугольникъ $abc = egf$, и $ab = eg$, уголъ $a = g$, $c = f$.

35. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ abc, сумма двухъ боковъ $ac + bc$, больше третьяго ab.*

Доказ. Когда прямая ab есть кратчайшая между точками a и b (6); то i е, ф. 30
что всякая другая линѣя кромѣ прямой соединяющая двѣ точки a и b, будетъ больше прямой ab. 2е естьли вообразимъ, что $ac + bc$ равна или меньше ab; то такія линѣи положится могутъ на линѣю ab, не занимая никакого пространства, что положенію противно; слѣдовательно $ac + bc > ab$.

36. ЗАДАЧА. *На данной прямой линѣе ab, начертить равносторонный треугольникъ.*

Рѣшеніе. Поставя ножку циркуля въ точкѣ a, разтвореніемъ линѣи ab начерти ф. 33
дугу y; по томъ поставя ножку циркуля въ точкѣ b, тѣмъ же разтвореніемъ опиши другую дугу x, которая пересѣчетъ первую въ точкѣ c, изъ a и b проведи къ c прямыя линѣи ac и bc, при

 чемъ

чемъ произойдетъ требуемой равносторонный треугольникъ *abc*

Доказ. $ab = ac$ и $ab = bc$ по рѣшенію, по сему и $ac = bc$ (ариф. 30); слѣдовательно всѣ три бока равны между собою, и треугольникъ *acb* есть равносторонный (26).

37. ЗАДАЧА. *Изъ трехъ данныхъ линѣй ab, bc и dc, изъ коихъ сумма всякихъ двухъ линѣй больше третїй, начертить треугольникъ.*

Рѣшенїе и доказ. Одну изъ данныхъ
ф. 34 линѣй на примѣръ *ab* возьми за основанїе, изъ точки *b* растворенїемъ линѣй *dc* опиши дугу, потомъ изъ точки *a*, растворенїемъ линѣи *bc* опиши другую дугу, которая по причинѣ что $bc + cd > ab$ пересѣчетъ первую въ точкѣ *c*, на конецъ проведя линѣи *ac* и *bc*, получишь требуемой треугольникъ.

Примѣч. Ежели дуги не пересѣкутся, то изъ данныхъ трехъ линѣй, треугольника сдѣлать не можно.

38. ЗАДАЧА. *По даннымъ двумъ линѣямъ ab и bc, начертить равнобедренный треугольникъ.*

Рѣшен. Линѣю *ab* возьми за основанїе,
ф. 35 изъ крайнихъ оной точекъ *a* и *b*, растворенїемъ линѣи *bc* опиши дуги взаимно себя

себя пересѣкающїя въ точкѣ *c*; потомъ проведя линѣи *ac* и *bc*, получишь требуемой треугольникъ,

Доказ. Бокъ *ac* равенъ *bc*, равнымъ растворенїемъ дуги описаны; слѣдовательно треугольникъ *abc* есть равнобедренный (26).

39. ЗАДАЧА. *Прямую линѣю ab, раздѣлить на двѣ равныя части.*

Рѣшен. На данной линѣе *ab*, сдѣлай по обѣ стороны равносторонные или равнобедренные треугольники *abd* и *abc* (36.38); чрезъ точки *c* и *d* проведи прямую линѣю *cd*, которая раздѣлитъ данную линѣю *ab* въ точкѣ *e* на двѣ равныя части. No 2 ф. 36

Доказ. Бокъ *ac* = *bc*, *ad* = *bd* и *dc* обоимъ треугольникамъ *adc* и *dbc* есть общїй бокъ; по сему треугольникъ *adc* = *dbc*, и уголъ *acd* = *bcd* (33); также треугольникъ *aec* = *bec*; ибо *ac* = *bc*, *ce* общая и уголъ *ace* = *bce*, слѣдовательно и *ae* = *be* (30).

40. ЗАДАЧА. *Изъ точки a, на прямой линѣе ec, поставить перпендикуляръ.*

Рѣшен. Поставя ножку циркуля въ точкѣ *a*, положи по обѣ стороны оной по изволенїю равныя части *ab* и *ac*, изъ точекъ *b* и *c* растворенїемъ взятымъ ф. 37

 болѣе

болѣе половины *bc*, начерти дуги взаимно себя пресѣкающїя въ точкѣ *d*, потомъ чрезъ оную проведи прямую линѣю *ad*, которая будетъ перпендикулярна къ *ec*.

Доказ. Треугольникъ *abd* = *adc*, потому что *bd* = *dc* равнымъ разтворенїемъ циркуля дуги описаны, также *ab* = *ac* по положенїю, *ad* общая; по сему и уголъ *bad* = *cad* (33), слѣдовательно *ad* перпендикулярна къ *ec*.

41. ЗАДАЧА. ***Изъ данной точки c, на данную прямую линѣю ab, опустить перпендикуляръ.***

Рѣшен. Изъ данной точки *c*, произ-
ф. 38 вольно взятымъ радїусомъ *ec* опиши дугу *ed*, которая бы прорѣзала линѣю *ab* въ двухъ точкахъ *e* и *d*; линѣю *ed* раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ *g* (39), проведи прямую линѣю *cg*, которая будетъ перпендикулярна къ *ab*.

Доказ. Треугольникъ *egc* = *dgc*, потому что бокъ *ce* = *cd* радїусы, *eg* = *gd* по рѣшенїю, *cg* общїй бокъ обоимъ треугольникамъ, по сему уголъ *egc* = *cgd* (33); слѣдовательно *cg* къ линѣе *ba* (21) перпендикулярна.

42. ТЕОРЕМ. ***Изъ точки c на линѣе ab, больше одного перпендикуляра cd поставить не можно.***

Доказ.

Доказ. Положимъ, что другая линѣя *ce* будетъ перпендикулярна къ *ab*: но какъ угол *ace* меньше угла *acd* и меньше равнаго ему угла *bcd*, также меньше угла *bce* (14); слѣдовательно линѣя *ce* къ линѣе *ab* не перпендикулярна. ф. 39

43. ТЕОРЕМА. *Изъ точки g на линѣю ab, больше одного перпендикуляра ge опустить не можно.*

Доказ. Положимъ, что *gf* будетъ перпендикулярна къ *ab*. Во отвращенiе чего определи отъ точки *e*, на обѣ стороны произвольной величины равныя части *ed* и *ec*, проведи *cg* и *dg*, будетъ треугольникъ *cgd* равнобедренный. Ибо треугольникъ *ceg* = *deg*, по тому что уголъ *ceg* = *deg* прямые, бокъ *ce* = *ed* по положенiю, *ge* общiй бокъ обоимъ треугольникамъ; чего ради и *cg* = *gd* (30): но *ce* = *ed*, по сему *ce* + *ef* > *ce* и > *fd*, и такъ *gf* падаетъ не на половину основанiя *cd* равнобедреннаго треугольника *cdg*, слѣдовательно не перпендикулярна къ *ab* (32). ф. 40

44. ТЕОРЕМ. *Перпендикулярная ab короче всѣхъ другихъ линѣй ac и ad, изъ точки a къ линѣе eb проведенныхъ.*

Доказ. Продолжа линѣю *ab*, сдѣлай *bf* = *ab*, проведи *cf*. Треугольникъ *abc* будетъ = *bcf*; ибо *ab* = *bf*, *bc* общая, и уголъ *abc* = *fbc* прямые, по сему *ac* = *cf*; но ло- ф. 41

маная линѣя $acf > abf$ (6), слѣдовательно *ac* равная половинѣ первой линѣи *acf* больше нежели *ab* равная половинѣ другой *af*. Также докажется, что *ad* и проч. больше *ab*.

45. ЗАДАЧ. *На данной линѣе ab, сдѣлать уголъ равенъ данному углу gfh.*

Рѣшен. Изъ точки *f* произвольно взя-
ф. 42 тымъ раствореніемъ циркуля, между боками даннаго угла начерти дугу *ik*, точки *i* и *k* соедини хордою *ik*; потомъ тѣмъ же раствореніемъ циркуля, на данной линѣе *ab*, изъ точки *a* на черти дугу *de*, на которой положа хорду *de* равну *ik*, чрезъ точку *e* проведи линѣю *ac*, будетъ уголъ *bac* равенъ данному углу *gfh*.

Доказ. Понеже $ad = fi$, $ae = fk$, и $de = ki$ по рѣшенію, того ради треугольникъ $ade = fik$ (33); слѣдовательно и уголъ $bac = gfh$.

46. ЗАДАЧ. *Данной уголъ bac раздѣлить на двѣ равныя части.*

Рѣшен. Изъ верьха *a* даннаго угла, по-
ф. 43 ложи соизволяющей величины равныя линѣи *ad* и *ae*, потомъ изъ точекъ *d* и *e* произвольно взятымъ раствореніемъ циркуля, начерти дуги пересѣкающія другъ друга въ точкѣ *f*; на конецъ изъ верьха *a* чрезъ точку *f* протяни линѣю *af*, которая данной уголъ *bac* раздѣлитъ на двѣ равныя части.

Дока-

Доказ. Проведя линѣи df и ef треугольникъ afd будетъ $= aef$; ибо $ad = ae$, $df = ef$ положенїю, и af общая, слѣдовательно и уголъ $daf = eaf$ (33).

47. ЗАДАЧ. *По двумъ линѣямъ ab, ac и углу x, начертить треугольникъ, чтобъ данной уголъ x заключался между данными линѣями.*

Рѣшен. и доказ. Взявъ линѣю ab за основанїе сдѣлай у точки a уголъ $bac =$ ф. 44
данному x (45); опредѣли линѣю ac равну данной ac, на конецъ соединя точки b и c прямою линѣею bc, произойдетъ требуемой треугольникъ abc.

48. ТЕОРЕМ. *Ежели двѣ параллельныя линѣи ab и cd, пересѣкутся третїею ef, то углы agf и ehd на крестъ, будутъ равны между собою.*

Доказ. Изъ точекъ g и h проведи къ параллельнымъ cd и ab перпендикулярныя ф. 45
линѣи gi и hk (41), которыя будутъ означать разстоянїе параллельныхъ линѣй ab и cd (44) и равны между собою (22). И такъ въ треугольникахъ ghi и ghk, будутъ углы i и k прямые; перпендикулярная $gi = hk$ и бокъ gh обоимъ треугольникамъ общїй; того ради треугольникъ ghi равенъ треугольнику ghk (34); слѣдовательно и уголъ $agf = ehd$.

Слѣдс. I. Когда двѣ параллельныя линѣи ab и cd, пересѣчены будутъ третїею ef, то въ одну сторону лежащїе углы agf и chf будутъ равны между собою. Ибо по предъидущей теоремѣ уголъ $agf = ghd = chf$ (20); по сему уголъ $agf = chf$ (ариф. 30). Также докажется, что и уголъ $bgf = dhf$.

Слѣдст. II. Сумма угловъ $bgh + dhg$ внутрь параллельныхъ линѣй, равна двумъ прямымъ угламъ. Ибо уголъ agf съ угломъ $bgh = 180$ град. (16): но уголъ $agf = dhg$ слѣдовательно $bgh + dhg = 180$ град. или двумъ прямымъ угламъ.

Слѣдст. III. Ежели нѣсколько параллельныхъ линѣй ab, cd, gn и проч. пере-
ф. 46 сѣкутся линѣею ef: то углы eib и ghf будутъ равны между собою; потому что углы eib и ehn по первому слѣдствїю равны между собою, но уголъ $ghf = ehn$ (20); слѣдовательно уголъ $ghf = eib$.

49. ТЕОРЕМ. *Ежели двѣ линѣи ab и cd пересѣкутся третїею ef такъ, что уголъ agf будетъ равенъ углу ehd, то линѣи ab и cd будутъ паралельны между собою.*

Доказ. Изъ точки g на линѣю cd опу-
ф. 45 стя перпендикуляръ gi сдѣлай $kg = hi$, проведи hk. Треугольникъ igh будетъ равенъ kgh: потому что бокъ gh обоимъ

тре-

треугольникамъ общїй, и $kg = hi$ уголъ $kgh =$ углу ghi по положенїю; по сему уголъ $gih = gkh$ прямые, и $kh = gi$ (30), но равныя kh и gi перпендикулярны къ ab и cd, того ради линѣи ab и cd находятся другъ отъ друга въ равномъ разстоянїи; слѣдовательно параллельны между собою (22).

Слѣдс. I. Ежели двѣ линѣи ab и cd пересѣчены будутъ третїею ef такъ, что уголъ egb равенъ будетъ углу ehd, то линѣи ab и cd будутъ параллельны; ибо уголъ $egb = agf$ (20) $= ehd$ по положенїю, по сему $ehd = agf$ (ариф. 30); слѣдовательно линѣи ab и cd параллельны.

Слѣдс. II. Линѣи ab и cd будутъ параллельны, ежели третья линѣя ef пересѣкаетъ оныя такъ, что сумма внутреннихъ угловъ $bgf + ehd$ равна двумъ прямымъ угламъ; ибо уголъ $agf + bgf =$ двумъ прямымъ угламъ (16), также $bgf + ehd =$ двумъ прямымъ угламъ по положенїю, по сему $agf + bgf = bgf + ehd$ (ариф. 30); а отнявъ отъ равныхъ количествъ уголъ bgf, останется уголъ $agf = ehd$ (ариф. 34), слѣдовательно линѣи ab и cd параллельны между собою.

50. ТЕОРЕМ. *Ежели двѣ параллельныя линѣи* ab *и* cd, *пересѣкутся двумя параллельными жъ* ef *и* gh, *то противулежащїя стороны* ki, ml *также* kl *и* mi,

заключаю-

заключающїяся между параллельныхъ линѣй будутъ равны.

Доказ. Проведя линѣю *il*, будетъ въ
ф. 47 треугольках *iml* и *ikl* уголъ *lim* = *kli* и *mii* = *lik* (48), и притомъ бокъ *il* обоимъ треугольникамъ общїй; по сему треугольникъ *iml* = *lki* (31), слѣдовательно и линѣи *ik* = *ml*, *kl* = *mi*.

51. ТЕОРЕМ. *Во всякомъ параллелограмѣ abcd, противулежащїе бока ad, bc и ab, dc параллельны.*

Доказ. Проведя *ac*, треугольникъ *adc*
No 1 будетъ = *abc*: ибо *ad* = *bc*, *dc* = *ab*, *ac*
ф. 23 общїй бокъ, по сему треугольникъ *acd* = *cab*, уголъ *dac* = *bca* (33); того ради линѣя *ad* параллельна *bc* и *dc* параллельна *ab* (49).

52. ЗАДАЧ. *Изъ точки c, провесть линѣю cd параллельную данной линѣе ab.*

Рѣшен. Чрезъ точку *c* проведи произ-
No 2 вольно линѣю *ce*, которая бы пересѣкла
ф. 48 линѣю *ab* въ точкѣ *e*. Сдѣлай уголъ *ecd* равенъ *ceb* (45); то проведенная чрезъ точку *d* линѣя *cd*, будетъ параллельна къ линѣе *ab* (49).

53. ТЕОРЕМ. *Во всякомъ треугольникѣ abc наружной уголъ bcd, равенъ двумъ внутреннимъ противулежащимъ угламъ cab + abc.*

Доказ.

Доказ. Изъ точки *c* протяни линѣю *ce* въ паралель боку *ab* (52), будетъ уголъ *ecd* равенъ углу *bac*, и уголъ *ecb* = углу *abc* (48); посему сумма угловъ *ecd* + *bce*, то есть уголъ *bcd* = углу *cab* + *abc*. ф. 49

Слѣдс. I. Во всякомъ треугольникѣ *abc*, сумма всѣхъ внутреннихъ угловъ равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град. Ибо по предъидущей теоремѣ уголъ *bcd* = *cab* + *abc*, а придавъ къ симъ уголъ *acb*, будетъ уголъ *bcd* + *acb* = *cab* + *abc* + *acb* (ариф. 33); но *bcd* + *acb* = двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (16), слѣдовательно сумма внутреннихъ угловъ *cab* + *abc* + *acb* равна двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (ариф. 30).

Слѣдс. II. Ежели два угла треугольника извѣстны, то третїй онаго уголъ сыщется, когда сумма двухъ извѣстныхъ угловъ вычтется изъ 180 град. остатокъ будетъ число градусовъ искомаго угла.

Слѣдс. III. Когда два угла одного треугольника равны двумъ угламъ другаго треугольника, то и третїй третьему непремѣнно равенъ; также ежели уголъ одного треугольника равенъ углу другаго, то и сумма двухъ перваго, равна суммѣ двухъ угловъ втораго треугольника.

Слѣдс. IV. Когда въ треугольникѣ одинъ уголъ прямой, то сумма прочихъ

угловъ

угловъ равна прямому жъ или 90 град. и такъ когда въ треугольникѣ будетъ одинъ уголъ прямой или тупой, то прочїе будутъ острые, поелику каждой изъ нихъ меньше прямаго; слѣдовательно во всякомъ треугольникѣ не можетъ быть болѣе какъ одинъ уголъ прямой или тупой; чего ради въ равнобедренномъ прямоугольномъ треугольникѣ острые углы суть по 45 град. (32). Въ равносторонномъ треугольникѣ каждой уголъ $= \frac{2}{3}$ прямаго угла или $\frac{180}{3}{}^{\circ} = 60$ град.

54. ТЕОРЕМА. *Треугольники abc и def будутъ совершенно равны, когда два бока ac и bc одного, равны двумъ бокамъ df и ef другаго, и углы a и d противолежащїе равнымъ бокамъ bc и ef равны; при томъ же углы abc и def будутъ острые или тупые.*

Доказ. Положимъ что углы b и e острые. Изъ
ф. 50 верьховъ c и f опусти перпендикуляры cg и fh къ ab и de (41), треугольникъ agc будетъ $=$ dfh: ибо бокъ ac $=$ df, уголъ a $=$ d по положенїю, уголъ agc $=$ dhf прямые; чего ради уголъ acg $=$ afh (53), посему и ag $=$ dh, cg $=$ fh (31), также треугольникъ bgc $=$ ehf, потому что уголъ bgc $=$ ehf прямые, gc $=$ hf доказано, и cb $=$ ef по положенїю, по сему bg $=$ he (34): и такъ (ag $+$ bg) ab $=$ (dh $+$ he) de (ариф. 33); слѣдовательно треугольникъ acb $=$ def (30 и 33).

ф. 51 *Въ другомъ случаѣ.* Когда углы abc и def тупые и бокъ cb $=$ ef. Изъ верьховъ c и f на продолженныя основанїя ab и de. опусти перпендикуляры cg и fh (41). Треугольникъ acg будетъ $=$ dfh, и cg $=$ fh докажется какъ и въ первомъ случаѣ; тожъ докажется и въ прямоугольныхъ треугольникахъ cbg и feh что bg $=$ he (34), наконецъ (ag $-$ gb) ab $=$ (dh $-$ he) de (ариф. 34); слѣдовательно треугольникъ acb $=$ треугольнику dfe (30 и 33).

Примѣч.

Примѣч. Когда въ такихъ треугольникахъ не ф. 52
будетъ упомянуто что углы *abc* и *def* острые или
тупые: то равенство сихъ треугольниковъ будетъ
сомнительное. Ибо когда изъ верьха *c* описать дугу
bn, то треугольникъ *acn* сдѣлается меньше *abc*
(ариф. 32), и бока *bc* и *cn* = *ef*. *ac* = *df*, и уголъ
cab = *edf* останутся непремѣнны, посему равенство
треугольниковъ будетъ сомнительное.

55. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ, когда уголъ a = b, то и бокъ ac будетъ = bc.*

Доказ. Изъ точки *c* на основанїе *ab*
опусти перпендикуляръ *cd* (41). въ тре-
угольникахъ *acd* и *bcd*, будетъ уголъ *cdb* No 1
= углу *adc* прямые, и уголъ *a* = *b* ф. 30
по положенїю; по сему уголъ *bcd* = *acd*
(53), и бокъ *dc* обоимъ треугольникамъ
общїй, слѣдовательно треугольникъ *adc*
= *bdc* и бокъ *ac* = *bc* (31).

56 ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ abc, когда уголъ abc больше угла a, то и бокъ ac больше бока bc.*

Доказ. У точки *b* сдѣлай уголъ *abd* = No 2
углу *a* (45). Будетъ бокъ *bd* = *ad* (55): ф. 53
но *dc* + *db* > *bc* (35); слѣдовательно
(*dc* + *ad*) *ac* > *bc*.

57. ТЕОРЕМА. *Въ треугольникѣ abc когда бокъ ab больше бока ac, то и уголъ acb будетъ больше угла abc.*

Доказ. На основанїи *ab* опредѣли ли- ф. 54
нѣю *ad* равну меньшей *ac*, уголъ *acd*

будетъ

будетъ $=$ *adc* (32). Уголъ *adc* или *acd* больше угла *abc* (53), къ углу *acd* придай уголъ *dcb*, будетъ уголъ (*acd* $+$ *dcb*) *acb* еще и больше *abc*. ч. д. н.

58 ЗАДАЧА. *На концѣ линѣи ab, поставить перпендикуляръ bd.*

Рѣшен. На произвольно взятой отъ
ф. 55 точки *b* линѣе *bc*, сдѣлай равносторонной треугольникъ *bce* (36). На продолженной *ce* опредѣли *eg* $=$ *eb*; на послѣдокъ изъ *b* чрезъ точку *g* протяни *bd*, которая будетъ желаемой перпендикуляръ.

Доказ. Понеже уголъ *ceb* $=$ *cbe* (32), также уголъ (*ceb*)*cbe* $=$ *cgb* $+$ *ebg* (53), уголъ *cgb* $=$ *ebg* (32), посему уголъ *ebg* $=$ $\frac{1}{2}$*cbe*; но уголъ *cbe* $=$ 60 град. (53), чего ради уголъ *ebg* $=$ 30 град. и наконецъ уголъ (*cbe* $+$ *ebg*)*abd* $=$ 90 град. (ариф. 33); слѣдовательно *bd* перпендикулярна къ *ad* (21).

59. ЗАДАЧ. *Начертить треугольникъ чтобы основанїе онаго было равно данной линѣе ab, и при немъ углы равны даннымъ угламъ x и y, коихъ сумма меньше двухъ прямыхъ угловъ.*

Рѣшен. и Доказ. Данную линѣю *ab*
ф. 56 возьми за основанїе, на которой сдѣлай у точки *a* уголъ *bac* $=$ *x*, а у точки *b* уголъ *abc* $=$ *y* (45), коихъ продолженные бока взаимно пересѣкшись въ точкѣ *c* составятъ требуемой треугольникъ *abc*.

60. ЗАДАЧ. *По данной высотѣ ac и дїогоналѣ bc которая больше высоты, начертить прямоугольной треугольникъ.*

Рѣшен. и доказ. На произвольно проведенной линѣе ae изъ точки a поставь перпендикуляръ ac равенъ данной высотѣ ac (58). Изъ точки c разтворенїемъ дїогонали bc опиши дугу, которая не опредѣленную ae пересѣчетъ въ точкѣ b. На конецъ соединя точки c и b прямою линѣею bc, получишь требуемой треугольникъ. ф. 57

61. ЗАДАЧ. *По данной высотѣ ab, основанїю ac и углу z, начертить треугольникъ.*

Рѣшен. и Доказ. Взявъ линѣю ac за основанїе, у точки a сдѣлай уголъ cad = z (45). Изъ точки a поставь перпендикуляръ ab равенъ данной высотѣ ab (58); потомъ изъ точки b проведи линѣю bd къ параллель основанїю ac (52), которая пересѣчетъ бокъ угла cad въ точкѣ d; на послѣдокъ соединя точки d и c прямою линѣею cd, получишь требуемой треугольникъ adc, коего высота de = данной ab (50). ф. 58

62. ТЕОРЕМ. *Въ двухъ треугольникахъ abc и abd, имѣющихъ одно основанїе ab сумма двухъ боковъ ac + bc одного треугольника, больше суммы боковъ ad + bd другаго.*

Доказ. Продолжи ad, пока пересѣчется съ бокомъ bc въ точкѣ e, будетъ ac + ce > ae (ad + de); также и be + de > db (35), а придавъ сїи величины къ первымъ, будетъ ac + (ce + be) bc + de > ad + de + db (ариф. 33); на конецъ отнявъ отъ обѣихъ ф. 59

ихъ количествъ величину de, останется $ac+bc >$ $ad+db$ (ариф. 34).

63. ТЕОРЕМ. *Когда два бока ab и bc треугольника abc, равны двумъ бокамъ de и ef другаго треугольника def, и между равными боками уголъ b перваго, больше угла e втораго; то основанїе ac перваго, будетъ больше основанїя df втораго.*

Доказ. На бокѣ ab (No 3) сдѣлай уголъ abg
ф. 60 $=def$. Опредѣли $bg=ef$ или bc, проведи линѣи cg и ag, которая будетъ $=df$ (30). При чемъ произойдетъ равнобедренный треугольникъ gbc: ибо $bg=ef=bc$ по положенїю, чего ради уголъ $bcg=bgc$ (32). Къ углу bgc придай уголъ agb, будетъ ($bgc+agb$)$agc > bcg$; а по отнятїи отъ послѣдняго, угла acb, останется уголъ agc больше acg, по сему $ac > ag$ (56), слѣдовательно и больше df.

Но естьли кто скажетъ что при сдѣланїи показаннаго: *Первое*, точка g упадетъ на прямой линѣе ac (No 1); то будетъ уголъ $abc > abg$, или больше e по положенїю; по сему линѣя $ac > ag$ и больше df (ариф. 33). *Второе*, что точка g упадетъ внутрь треугольника abc (No 2): то будетъ $ac+bc > ag+bg$ (62), а по отнятїи равныхъ количествъ bc и bg, останется $ac > ag$ и больше df (ариф. 34).

64. ТЕОРЕМ. *Во всякомъ четвероугольникѣ $abcd$, сумма внутреннихъ угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Доказ. Проведи дїогональ ac, отъ чего
ф. 27 произойдетъ два треугольника abc и acd, изъ коихъ сумма угловъ каждаго равна

двумъ

двумъ прямымъ угламъ, слѣдовательно сумма всѣхъ угловъ четвероугольника равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.

Слѣдс. I. Ежели три угла въ четвеpосторонникѣ прямые, то четвертой непремѣнно прямой, а когда два какїе нибудь изъ четырехъ угловъ равны двумъ прямымъ угламъ, то прочїе также равны двумъ прямымъ.

Слѣдст. II. Ежели въ параллелограмѣ один угол b прямой, то и прочїе будутъ прямые: ибо уголъ b съ угломъ m равны двумъ прямымъ угламъ (48), но уголъ b прямой, слѣдственно и уголъ m прямой. Также уголъ b съ угломъ d равны двумъ прямымъ угламъ (48), по сему уголъ d равенъ прямому жъ, и уголъ c по первому слѣдствїю не премѣнно прямой. ф. 24

65. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ многоугольникѣ abcdef сумма внутреннихъ угловъ, равна произведенїю числа боковъ безъ двухъ на два прямые угла.*

Доказ. Раздѣли многоугольникъ $abcdef$. произвольнымъ образомъ на треугольники линѣями ae, eb и bd изъ однаго угла въ другой проведенными, какъ въ фигурѣ значитъ. При чемъ произойдетъ число тре- ф. 61

угольниковъ равно числу боковъ безъ двухъ; но сумма угловъ всякаго треугольника, равна двумъ прямымъ угламъ; того ради сумма всѣхъ угловъ оныхъ треугольниковъ (кои составляютъ сумму всѣхъ угловъ многоугольника) равна произведенїю числа треугольниковъ или суммѣ боковъ безъ двухъ, умноженныхъ на два прямые угла, то есть $6 - 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ. ч. д. н.

66. ЗАДАЧА. *Сыскать сумму градусовъ внутреннихъ угловъ фигуры abcdef.*

Рѣшен. Число боковъ безъ двухъ умножь чрезъ 180 град. или два прямыхъ угла получишь требуемое, то есть $6 - 2 = 4 \times 180$ град. $= 720$ град. $=$ числу градусовъ внутреннихъ угловъ фигуры *abcdef*.

67. ТЕОРЕМ. *Во всякомъ многоугольникѣ сумма наружныхъ угловъ* $cbg + dch + edi + kel + lfa + mab$, *равна четыремъ прямымъ угламъ или 360 град.*

Доказ. Понеже каждой внутренней уголъ *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, со смѣжнымъ ему наружнымъ угломъ равны двумъ прямымъ угламъ (16); слѣдовательно сумма внутреннихъ и наружныхъ угловъ, равна двумъ прямымъ угламъ умноженнымъ на число боковъ фигуры, то есть

6 ×

$6 \times 2 = 12$ прямымъ угламъ: но сумма внутреннихъ угловъ многоугольника, по предъидущей теоремѣ равна двумъ прямымъ угламъ умноженнымъ на число боковъ безъ двухъ, то есть $6 - 2 = 4 \times 2 = 8$ прямымъ угламъ; которое вычтя изъ 12 остатокъ 4 прямыхъ угла или 360 град. будетъ равенъ суммѣ наружныхъ угловъ $cbg + dch + edi + kef + lfa + mab$.

68. ЗАДАЧА. *Сыскать сумму градусовъ наружныхъ угловъ фигуры, у которой одинъ уголъ входящїй.*

Рѣшен. Къ четыремъ прямымъ угламъ придай два прямыхъ угла, получишь требуемую сумму наружныхъ угловъ фигуры, то есть шесть прямыхъ угловъ или 6×90 град. $= 540$ град. ф. 62.

Доказ. Точки P и q соединя прямою линѣею Pq, произойдетъ многоугольникъ безъ входящаго угла, и сумма наружныхъ угловъ $a, b, c, d, e,$ такой фигуры, по предъидущей теоремѣ равна 4 прямымъ угламъ; но въ разсужденїи входящаго угла, слѣдуетъ къ четыремъ прямымъ угламъ придать уголъ $g, h,$ и i, коихъ сумма равна двумъ прямымъ угламъ (53); слѣдовательно сумма наружныхъ угловъ многоугольника $a + b + c + g + i + h + d + e = 6$ прямымъ угламъ.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, что для сысканїя суммы наружныхъ угловъ какого нибудь многоугольника со входящими углами, должно на всякой входящїй уголъ къ четыремъ прямымъ угламъ придавать по два прямыхъ угла.

69. ЗАДАЧА. *На данной линѣе ab начертить квадратъ.*

Рѣшен. Изъ точекъ *a* и *b* на линѣе
ф. 25. *ab* поставь перпендикуляры *ac* и *bd* = *ab* (58), точки *c* и *d* соединя прямою линѣею *cd* будетъ фигура *abcd* требуемой квадратъ.

Доказ. Понеже *ab* = *ac* = *bd* и углы *cab* и *abd* прямые по рѣшенїю, того ради *cd* параллельна *ab* (22), по сему всѣ бока равны (50) и углы прямые; слѣдовательно фигура *abcd* есть квадратъ (27).

70. ЗАДАЧА. *По основанїю ab и высотѣ ad; начертить прямоугольникъ.*

Рѣшен. Взявъ линѣю *ab* за основанїе,
ф. 63. изъ точекъ *a* и *b* поставь перпендикуляры *ad* и *bc* равные высотѣ *ad* (58); наконецъ точки *d* и *c*, соединя прямою линѣею *cd* будетъ требуемой прямоугольникъ.

Доказ. Понеже *ad* = *bc* и перпендикулярны къ *ab*, по сему *ab* параллельна къ *cd* (22), также *ad* параллельна къ *bc*, и углы *a*, *b*, *c*, *d* прямые; слѣдовательно фигура *abcd* есть прямоугольникъ (27).

71. ЗАДАЧА, *На линѣе ab по данному углу y, начертить наклоненной квадратъ (ромбъ).*

Рѣшен.

Рѣшен. На линѣе ab у точки a сдѣлай уголъ $bad = y$ (45), на сторонѣ которо- No 3
раго опредѣли линѣю $ad = ab$. Потомъ ф. 64
изъ точекъ d и b проведи dc и bc паралельно къ ab и ad (52), кои взаимно пересѣкшись въ точкѣ c, сдѣлаютъ требуемой ромбъ (50).

72. ЗАДАЧА. *По двумъ линѣямъ ad и bc и углу z начертить параллелограмъ.*

Рѣшен. Взявъ линѣю ad за основанїе, ф. 65
сдѣлай у точки a уголъ bad равенъ данному z (45), опредѣли $ab = bc$. Изъ точекъ b и d проведи bg и dg въ параллель ad и ab (52), отъ чего произойдетъ требуемой параллелограмъ.

Доказ. Понеже $ad = bg$, $ab = dg$ (50), и уголъ $bad = bgd = z$, по сему уголъ $abg = adg$; слѣдовательно фигура $abgd$ есть параллелограмъ (27).

73. ЗАДАЧА. *По тремъ даннымъ линѣямъ ab, bc, cd и углу x начертить трапецїю, чтобы bc была параллельна основанїю ab.*

Рѣшен. и Доказ. Взявъ линѣю ab за основа- ф. 66
нїе сдѣлай у точки b уголъ $abc = x$ (45), на сторонѣ котораго опредѣли $bc = cd$. Изъ точки c проведи cd въ параллель къ $ab = bc$, наконецъ точки a и d соедини прямою линѣею ad, получишь требуемую трапецїю.

74. ЗАДАЧА. *Изъ четырехъ линѣй ab bc, cd и de, начертить трапецію, что бы bc была параллельна основанію ab.*

ф. 67 *Рѣшен.* Взявъ линѣю ab за основаніе, определи на оной линѣю aq = bc, потомъ сдѣлай на bq треугольникъ qgb котораго бы бокъ bg былъ равенъ cd и бокъ gq = de (37), изъ точекъ g и a проведи линѣи gc и ac въ параллель къ ab и qg (52), кои пересѣкшись въ точкѣ c определятъ требуемую трапецію.

Доказ. ab = ab, aq = cb, gq = de по положенію: но aq и cg также ac и gq между собою параллельны по рѣшенію, чего ради aq = cg = bc, ac = qg = ed; слѣдовательно трапеція abgc, имѣетъ бока равны даннымъ линѣямъ.

Примѣч. Такимъ же образомъ начертится трапеція и по тремъ даннымъ линѣямъ, съ тою только разностію, что на линѣе qb равной разности двухъ линѣй кои имѣютъ быть параллельными между собою, должно сдѣлать равнобедренной треугольникъ bgq, котораго бы бока были равны данной третій линѣе cd, а впрочемъ надлежитъ поступать по вышеписанному рѣшенію.

75. ЗАДАЧА. *По даннымъ, высотѣ ab, углу z и двумъ линѣямъ ad и bc, кои должны быть между собою параллельными начертить трапецію.*

Рѣше-

Рѣшен. Сдѣлай основанїе ad = данной ad, у точки a сдѣлай уголъ $dab = z$, изъ точки a поставь перпендикуляръ ag = данной высотѣ ab, потомъ изъ точки g проведи неопредѣленную параллельно къ ad, на которой отъ точки b положи bc = данной bc, наконецъ точки c и d соединя прямою линѣею cd, получишь требуемую трапецїю имѣющую высоту равну данной ab. ф. 68

О ЛИНѢЯХЪ ПРОВЕДЕННЫХЪ, И О МѢРѢ УГЛОВЪ ВЪ КРУГѢ.

76. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ центра c круга $adbg$ на хорду ab опустится перпендикуляръ ce, то оной какъ хорду ab, такъ и дугу adb раздѣлитъ на двѣ равныя части.*

Доказ. Изъ центра c проведя линѣи ac и bc, будетъ въ треугольникахъ aec и bec бокъ $ac = bc$ радїусы, ec общїй бокъ, и уголъ $aec = bec$ прямые, по сему треугольникъ $aec = bec$ (34), и $ae = be$, уголъ $acd = bcd$; того ради дуга $ad = bd$ (13), слѣдовательно хорда ab, и дуга adb, перпендикуляромъ cd раздѣлены на двѣ равныя части. ф. 69

Слѣдст. Изъ сего видно, что изъ половины хорды ab, чрезъ центръ c проведенная линѣя eg, къ хордѣ ab будетъ перпендикулярна; ибо въ треугольникахъ ace и bec, $ac = bc$, $ae = be$, ec общїй бокъ посему и уголъ $bec = aec$ (33); слѣдовательно eg перпендикулярна къ ab.

77. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ средины хорды ab поставится перпендикуляръ ed, то оной пройдетъ чрезъ центръ круга abd.*

Доказ. Ибо всякая точка изъ соста-
ф. 70 вляющихъ перпендикулярную линѣю ed, какъ на примѣръ g, будетъ находиться въ равномъ разстоянiи отъ точекъ a и b, потому что въ треугольникахъ aeg и beg, ae = be, eg общїй бокъ и уголъ aeg = beg прямые, по сему ag = bg; слѣдовательно нѣкая точка изъ составляющихъ перпендикулярную линѣю ed есть центръ круга (8). Есть лижь положимъ, что центръ круга abd будетъ точка c: то проведя линѣи ac и bc должна быть ac равна bc (8), но въ треугольникахъ aec и bec линѣя ec общая, бокъ ae = be, тупой уголъ aec больше остраго угла bec, того ради ac больше bc (63); и по тому точка c не есть центръ.

78. ТЕОРЕМА. *Хорды ab и df, равно отстоящїя отъ центра круга o, равны между собою.*

ф. 71 *Доказ.* Изъ центра o на хорды ab и df опусти перпендикуляры oc и oe, проведя oa и od будетъ oe = oc по положенїю, od = oa радїусы, и уголъ e = c прямые, по сему полхорды de = ac (34); слѣдовательно ab = df.

Слѣдо-

Слѣдс. Равнымъ хордамъ ab и df, равныя дуги соотвѣтствуютъ. Потому что $ao = od$, $bo = of$ и $ab = df$, посему треугольникъ $dof = aob$ (33), и уголъ $dof = aob$, слѣдовательно и дуга ab = дугѣ df (13).

79. ТЕОРЕМ. *Во всякомъ кругѣ aefb изъ всѣхъ хордъ cd, ef и проч. ближайшая къ центру болѣе тѣхъ кои далѣе отъ онаго, и дїаметръ ab больше всякой хорды.*

Доказ. Ибо проведя oc, od, of, oe и проч. будетъ 1е, въ треугольникахъ cod и eof бока co, od, eo, fo равны, и уголъ cod одного, больше угла eof другаго; слѣдовательно хорда dc больше хорды ef (63). 2е дїаметръ $ab = oc + od$, но $oc + od > cd$; слѣдственно и дїаметръ ab больше хорды cd и проч. ф. 72

80. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ agbd центръ сыскать.*

Рѣшен. Проведи произвольно хорду ab, раздѣли оную на двѣ равныя части (39) чрезъ средину e хорды ab проведи перпендикулярную линѣю deg (40), которая бы концами касалась окружности круга; на послѣдокъ линѣю gd раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ c, которая будетъ искомой центръ. ф. 69

Доказ.

Доказ. Перпендикулярная gd, изъ средины хорды проведенная, проходитъ чрезъ центръ круга c (77), по сему оная есть дїаметръ, и точка c центръ круга (8).

81. ЗАДАЧА. *Чрезъ три данныя точки a, b и c, лежащїя не въ прямой линѣе, или около даннаго треугольника abc описать кругъ.*

Рѣшен. Данныя точки a, b, c соеди-
ф. 73 ня прямыми линѣями ac и bc, раздѣли каждую на двѣ равныя части въ точкахъ d и e, чрезъ которыя проведи къ соединяющимъ данныя точки линѣямъ, перпендикулярныя линѣи dh и eh кои взаимно пересѣкшись въ точкѣ h, опредѣлятъ центръ; наконецъ изъ точки h, радїусомъ ha или bh опиши кругъ, котораго окружность пройдетъ чрезъ три данныя точки a, b, c.

Доказ. Проведя линѣи hc, hb и ha, будетъ въ треугольникахъ bdh, cdh уголъ hdb равенъ hdc прямые, $db = cd$, и hd обоимъ треугольиикамъ общїй бокъ, чего ради $bh = ch$ (30); для подобной причины будетъ и $ch = ah$; по сему $ch = ah = bh$ суть радїусы круга изъ центра h описаннаго, коего окружность прошла чрезъ данныя точки a, b и c.

82. ЗАДАЧА. *Данной дуги acb центръ сыскать.*

Рѣшен. Проведи по изволенїю двѣ хорды *ac* и *bc* раздѣли каждую на двѣ равныя части перпендикулярными линѣями *dh* и *eh*, кои взаимно пересѣкшись въ точкѣ *h*, опредѣлятъ искомой центръ. Справедливость сего докажется какъ и въ предъидущей задачѣ.

83. *Опредѣлен. Тангенсъ* или *касательная линѣя ce* называется та, которая касается окружности круга, не прорѣзывая онаго. ф.74

84. ТЕОРЕМ. *Когда на концѣ радїуса ab поставится перпендикуляръ bc, то оной коснется круга только въ одной точкѣ b.*

Доказ. Понеже радїусъ *ab* есть перпендикуляръ къ *bc* и потому оной кратчайшее разстоянїе отъ центра *a* до линѣи *bc*, по сему всякая сей линѣи точка, на примѣръ какъ *d* и проч. далѣе лежитъ отъ центра нежели *b*, того ради всѣ точки, кромѣ одной *b* суть внѣ круга; слѣдовательно линѣя *bc* касается окружности круга только въ одной точкѣ *b*.

Слѣдс. Ежели изъ центра *a*, въ касательную точку *b* проведется линѣя *ab*, то

то оная будетъ перпендикулярна къ касательной bc. Ибо bc касается круга только въ одной точкѣ b, чего ради всякая оной точка должна находиться внѣ круга, и потому изъ центра a къ сей точкѣ d проведенная линѣя ad, будетъ болѣе нежели радїусъ ab; по сему ab, есть кратчайшая между всѣми линѣями кои можно протянуть отъ точки a къ касательной bc; слѣдовательно линѣя ab перпендикулярна къ касательной bc (44).

85. *Опредѣленїе*. *Секансъ* (*Сѣкущая*) есть
ф. 76 линѣя которая изъ точки лежащей внѣ круга, разрѣзываетъ оной на двѣ какїя нибудь части, какъ dba, dgf, dhe. *Наружная часть секанса*, есть часть онаго находящаяся внѣ круга, какъ db, dg и dh; а внутри круга находящаяся часть ba, gf и he, именуется *внутреннею частью секанса*.

86. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки d, взятой выше центра круга проведутся до вогнутой окружности линѣи da, df и de, то будетъ самая большая изъ оныхъ линѣя da проходящая чрезъ центръ, также ближайшая къ центру болѣе тѣхъ кои далѣе отъ онаго.*

ф. 75 *Доказ.* Изъ центра c протяни ce и cf,
и 76 будетъ 1е, $ad = dc + (cf)ac > df$, также $ad = dc + (ca)ce > de$. 2 поелику въ

пре-

треугольникахъ dcf и dce линѣя dc есть общая и бокъ $ce = cf$, а уголъ $dcf > dce$; слѣдовательно $df > de$ (63); тожъ самое должно разумѣть и о тѣхъ линѣяхъ, кои проведены изъ точки d, лежащей внѣ круга, какъ изъ фигуры 76 видно.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что по обѣ стороны проходящей чрезъ центръ линѣи ad, къ окружности круга aeb, кромѣ двухъ равныхъ линѣй провесть не можно; слѣдовательно ежели изъ одной точки проведутся къ окружности круга три равныя линѣи, то оная точка будетъ центръ.

87. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки d, лежащей внѣ круга, проведутся до выпуклой окружности круга линѣи db, dg, dh и dk: то самая кратчайшая изъ сихъ линѣй будетъ та, которая будучи продолжена чрезъ центръ c пройдетъ.*

Доказ. Ибо проведя изъ центра c радїусы cg, ch и ck, будетъ въ треугольникахъ dcg, dch, dck линѣя $dc = bc + bd < gc + gd$ (35); но $gc = bc$, то отнявъ оныя отъ первыхъ количествъ останется $bd < gd$ (ариф. 34); также $bd + hc > gd + gc$ (62): но $cg = ch$ радїусы, и такъ отнявъ оныя отъ обеихъ количествъ останется $dh > gd$ (ариф. 34); ф. 76

такимъ

такимъ же образомъ докажется, что и $dk > hd$.

Слѣдс. Изъ сего видно, что по обѣ стороны кратчайшей линеи bd, не можно провесть кромѣ двухъ равныхъ прямыхъ линей.

88. ТЕОРЕМА. *Когда на продолженномъ радіусѣ ae, возмется произвольная линея eb за радіусъ и опишется кругъ, то оной коснется перваго въ одной точкѣ e; и обратно, когда два круга касаются между собою въ одной точкѣ, то радіусы ae и be проведенные въ касательную точку составятъ прямую линею ab.*

ф. 77 Доказ. 1е На концѣ радіуса ae поставь перпендикуляръ ce (58), которой коснется круга ef въ одной точкѣ e (84): но какъ радіусы ae и be концами своими сомкнулись въ одну точку e, чего ради ec касается и другаго круга въ той же точкѣ e; слѣдовательно оные круги касаются между собою въ одной точкѣ e. 2е ежели изъ центровъ a и b въ точку касательную проведутся радіусы ae и be и проведется чрезъ оную точку касательная cd, то оная какъ къ ae, такъ и къ be будетъ перпендикулярна (84); слѣдовательно ab будетъ линея прямая.

89. ТЕОРЕМА. *Когда частїю bd радїуса ad взятою внутри круга опишется другой кругъ, то оной коснется перваго въ одной точкѣ d.*

Доказ. Ибо проведя линѣи ac и bc будетъ $ab + bc > ac$ (35); но $ac = ab + bd$ радїусы, посему ф. 78
$ab + bc > ab + bd$, а отнявъ отъ обѣихъ величинъ линѣю ab останется $bc > bd$; слѣдовательно точка c далѣе лежитъ отъ центра b нежели точка d; того ради всѣ точки окружности круга cde, кромѣ одной d внѣ круга dg, слѣдовательно окружность онаго касается окружности круга edc только въ одной точкѣ d.

90. ТЕОРЕМА. *Между параллельными хордами cd и ef, дуги ce и fd равны между собою.*

Доказ. Изъ центра o на хорду cd или ef опусти перпендикуляръ op, которымъ ф. 72
дуги cpd и epf раздѣлятся на двѣ равныя части (76), чего ради будетъ дуга $cp = dp$ и дуга $ep = pf$; посему $cp - ep = dp - pf$ (ариф. 34), то есть $ce = df$.

91. ТЕОРЕМА. *Уголъ bad коего верьхъ a на окружности круга, измѣряется половиною дуги bd содержащейся между его боками, то есть половиною числа градусовъ, минутъ и проч. дуги bd.*

Доказ. Положимъ ге, что одинъ бокъ угла есть дїаметръ ad: то проведя чрезъ ф. 79

центръ c линѣю bf въ параллель боку ab, углы bad и fcd будутъ равны (48), но уголъ fcd, коего верьхъ въ центрѣ c мѣряется дугою $fd = ah$ (13 и 20), (ибо каждая изъ сихъ двухъ дугъ будетъ мѣрою противу положенныхъ угловъ) но $ah =$ дугѣ bf между параллельныхъ линѣй ba и fh (90), по сему дуга $fd = bf$; слѣдовательно мѣра угла bad или fcd, равна дугѣ fd или bf, которая равна половинѣ дуги bd, содержащейся между боками угла bad.

2е Когда одинъ бокъ ab угла baf бу-
ф. 80 детъ находиться по одну, а другой бокъ af по другую сторону центра c: то изъ верьха a проведя діаметръ ad, уголъ baf раздѣлится на двѣ части, изъ коихъ по первому случаю будетъ мѣра угла $bad = \frac{1}{2}$дуги bd, а мѣра угла $daf = \frac{1}{2}$ дуги df, по сему мѣра сихъ частей, то есть угла $baf = \frac{1}{2}$ дуги $bd + \frac{1}{2}df = \frac{1}{2}$ дуги bf.

3е, Естьли оба бока угла fag, будутъ находиться по одну сторону центра c: то проведя діаметръ ad, по первому случаю будетъ мѣрою угла dag половина дуги $dg = \frac{1}{2}df + \frac{1}{2}fg$: но уголъ fad измѣряется половиною дуги df, слѣдовательно уголъ fag измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги fg (ариф. 34).

Слѣдст. Изъ того видно. Iе что углы
ф. 81 a и b, коихъ верьхи на окружности,

стоя-

стоящїе на одной дугѣ df, равны между собою, и каждой изъ таковыхъ угловъ равенъ половинѣ угла dcf, стоящаго на тойже дугѣ df, коего верьхъ въ центрѣ c. 2е, углы bad и bhd, коихъ верьхи при окружности стоящїе на дїаметрѣ bd суть прямые; ибо каждой изъ нихъ измѣряется половиною полуокружности круга, которая $=$ 90 град. 3е, уголъ fad, котораго мѣра дуга fd менѣе половины окружности, есть острой; и уголъ bag стоящїй на дугѣ bfg, которая болѣе половины окружности есть тупой, поелику половина сей дуги болѣе нежели 90 град. ф. 82

92. **ЗАДАЧА.** *Изъ точки b лежащей внѣ круга cg, провесть касательную къ кругу.*

Рѣшен. Данную точку b, соедини съ центромъ круга a прямою линѣею ab, которую раздѣля на двѣ равныя части въ точкѣ e, опиши кругъ $bcag$, коего окружность пересѣчется съ окружстью круга въ точкахъ c и g, чрезъ точки c и g проведи линѣи bc и bg, изъ коихъ каждая будетъ касательная къ кругу gc. ф. 83

Доказ. Ибо проведя ac и ag углы agb и acb, стоящїе на дїаметрѣ ab будутъ прямые (91), по сему линѣи bc и bg перпендикулярны къ радїусамъ ac и ag; слѣдовательно касательныя (84).

Слѣдст. Изъ чего видно, что касательныя bc и bg равны; ибо $ac = ag$ радїусы, уголъ $c = g$ прямые (91), и ab общїй бокъ треугольникамъ abc и abg, слѣдовательно $bg = bc$ (34).

93. ТЕОРЕМА. *Уголъ bag изъ касательной ag и хорды ab, измѣряется половиною дуги ab.*

Доказ. Понеже линѣя da, чрезъ центръ
ф. 79 c въ касательную точку a проведенная, перпендикулярна къ касательной ag (84), посему уголъ gad есть прямой (14); слѣдовательно оной измѣряется половиною полуокружности abd, или $\frac{1}{2}$ю дуги $ab + \frac{1}{2}bd$; но уголъ bad измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги bd, слѣдовательно мѣра угла bag есть $\frac{1}{2}$ дуги ab.

94. *Определен.* *Сегментъ* или *отрѣ-*
ф. 84 *зокъ* круга afb или agb, есть пространство опредѣленное частїю окружности круга afb или agb и хордою ab.

95. ЗАДАЧА, *На данной линѣе ab начертить отрѣзокъ круга, въ которомъ бы вписанной уголъ равенъ былъ данному z.*

Рѣшен. У точки b сдѣлай уголъ abc
ф. 84 равенъ данному z, потомъ на концѣ b линѣи bc, и изъ средины e линѣи ab, поставь перпендикуляры bd и ed (58. 40).

Изъ

Изъ точки *d* гдѣ перпендикулярныя пересѣклись, радїусомъ *db* опиши дугу *bfa*; получишь желаемой отрѣзокъ круга *afb*; въ которомъ изъ произвольно взятой точки *f*, проведенными къ концамъ данной *ab* линѣями *af* и *bf*, опредѣлится уголъ *afb* равенъ данному *z*.

Доказ. Понеже *bc* касается круга въ одной только точкѣ *b* порѣшенїю, по сему уголъ *abc* измѣряется половиною дуги *agb* (93), также уголъ *afb* измѣряется половиною той же дуги *agb* (91), того ради уголъ $abc = afb$; но уголъ $abc =$ данному *z*; слѣдовательно и уголъ $afb =$ углу *z*.

96. ТЕОРЕМА. *уголъ pab, изъ наружной части pa секанса pg и хорды ab, измѣряется половиною суммы двухъ дугъ ab и ag, или половиною дуги bag.*

Доказ. Ибо смѣжные углы *pab* и *bag* вообще равны двумъ прямымъ угламъ, по сему оные измѣряются половиною цѣлой окружности круга, то есть $\frac{1}{2}$ю дуги $bdg + \frac{1}{2}\,bag$, но уголъ *bag* измѣряется $\frac{1}{2}$ю дуги *bdg* (91); слѣдовательно мѣра угла *pab* равна половинѣ дуги *agb* или $\frac{1}{2}$ дуги $ab + \frac{1}{2}\,ag$. ф. 80

97. ТЕОРЕМА. *Уголъ bad, коего верьхъ а внутри круга, измѣряется*

 по-

половиною дуги bd съ половиною дуги fg находящейся между продолженными его боками.

Доказ. Ибо проведя линѣю gh параллельно
ф. 85 къ fd, будетъ уголъ bad = bgh (48), и мѣра угла bgh есть $\frac{1}{2}$ дуги bdh = $\frac{1}{2}$ bd + $\frac{1}{2}$ gh: но дуга dh = дугѣ fg (90) для параллельныхъ fd и gh: слѣдовательно мѣра угла bad есть $\frac{1}{2}$ дуги bd + $\frac{1}{2}$ fg.

98. ТЕОРЕМА. *Уголъ dab, коего верьхъ a внѣ круга, измѣряется половиною дуги bd безъ половины дуги gf.*

Доказ. Проведя gx параллельно къ da будетъ уголъ dab = xgb (48): но мѣра
ф. 86 угла xgb равна $\frac{1}{2}$ дуги xb, дуга жъ xb = дугѣ db − dx; но dx = gf (90), по сему дуга xb = дугѣ db − gf, слѣдовательно мѣра угла xgb или dab, есть $\frac{1}{2}$ дуги xb = $\frac{1}{2}$ дуги db − $\frac{1}{2}$ gf (ариф. 36).

Примѣчан. Ежели линѣя ad сдѣлается касательною ap, то мѣра угла pab будетъ равна половинѣ дуги pxb − $\frac{1}{2}$ pg; ибо уголъ pgb измѣряется $\frac{1}{2}$ ю дуги pxb (91), а мѣра угла apg = $\frac{1}{2}$ дуги pg (93): но уголъ pgb − apg = углу pab (53); слѣдовательно и половина дуги pxb − $\frac{1}{2}$ pg есть мѣра угла pab.

99. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ четвероугольникѣ* $abcd$ *вписанномъ въ кругѣ, противулежащїе углы* $adc + abc$, *также* $dab + dcb$ *равны двумъ прямымъ угламъ*

Доказ. Мѣра угла $dab =$ половинѣ ду-
ги bcd, а мѣра угла $dcb = \frac{1}{2}$ дуги bad ф. 87.
(91): но $\frac{1}{2}$ дуги $dcb + \frac{1}{2}$ bad равна по-
ловинѣ окружности круга $=$ 180 град. по
сему сумма угловъ $dab + dcb =$ двумъ
прямымъ угламъ. Такимъ же образомъ
докажется, что сумма угловъ $adc + abc$
равна двумъ прямымъ угламъ.

О ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ ЛИНѢЯХЪ И ПОДОБСТВѢ ТРЕУГОЛЬНИКОВЪ.

100. *Определен.* Ежели изъ четырехъ
линѣй ab, cd, ge, ef первая содержится ф. 88
въ другой столько разъ, сколько третья
въ четвертой, то есть $ab : cd = ge : ef$
то такїе линѣи называются *геометрически пропорцїональны.*

101. *Определен.* Когда изъ трехъ линѣй первая содержится во второй, сколько вторая въ третїй, на примѣръ, $ab : cd = cd : ge$; то сїи линѣи находятся *въ непрерывной геометрической пропорцїи*, изъ коихъ вторая cd именуется *среднею пропорцїональною* между первою ab и послѣднею ge.

102. ЗАДАЧА. *Данную линѣю ab раздѣлить на столько равныхъ частей, на сколько желаешъ.*

Рѣшен. Положимъ что должно данную
ф. 89 *ab* раздѣлить на пять равныхъ частей, чего ради изъ точки *a* подъ какиинъ нибудь угломъ проведи линѣю *ac*, на которой начиная отъ *a* положи произвольной величины пять равныхъ частей; потомъ конецъ данной линѣи *b* и послѣднюю точку *d* линѣи *ac*, соедини прямою линѣею *bd*, и напослѣдокъ изъ точекъ замѣченныхъ *e*, *f*, *g*, и *h* проведи *ei*, *fk* и проч. въ параллель *bd*, при чемъ данная линѣя *ab* раздѣлится на пять равныхъ частей.

Доказ. Изъ точекъ *e*, *f*, *g*, *h*, проведя линѣи *en*, *fo*, *gp* и *hq* въ параллель *ab* (52), будутъ треугольники *aei*, *efn* и проч, равны между собою. Ибо $ae = ef$ и проч. по положенiю, уголъ $eai = fen = gfo$ и проч. также уголъ $aei = efn = fgo$ и проч. (48); чего ради треугольники *aei*, *efn*, *fgo* и проч. равны между собою (31), и $ai = en = fo$ и проч. но какъ *en* параллельна *ik* и *fo* параллельна *kl*, также *ei* параллельна *nk*, *kf* параллельна *lo* и проч. посему $en = ik$ и $fo = kl$ и проч. (50); чего ради и $ai = ik = kl$ и проч. слѣдовательно *ab* раздѣлена на пять равныхъ частей.

Слѣдст.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, когда бокъ *ad*, какого нибудь треугольника *abd*, раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей *ae*, *ef* и проч. и изъ точекъ *e*, *f*, *g* и проч. проведутся линѣи въ паралелель основанїю *ab*: то бокъ *bd* сими линѣями раздѣлится во столько жъ между собою равныхъ частей, сколько оныхъ бокъ *ad* имѣть будетъ.

103. *Опредѣлен. Подобные треугольники* называются тѣ, коихъ три угла одного, равны порознь тремъ угламъ другаго. Бока противулежащїе равнымъ угламъ называются *сходственными*.

104. ТЕОРЕМА. *Въ подобныхъ треугольникахъ abc и deh, сходственные бока de : ab, eh : bc, dh : ac геометрически пропорцїональны, то есть de : ab = eh : bc = dh : ac.*

Доказ. Представь себѣ, что треугольникъ *deh* положенъ на треугольникъ *abc* ф. 90 такъ, что бокъ *de* падаетъ на бокъ *ab*, но какъ уголъ *e* = *b*, то бокъ *eh* упадетъ на бокъ *bc* и бокъ *dh* упадетъ паралельно къ *ac*; потому что уголъ *d* = *a*, и будетъ *bk* = *eh*, *dk* = *dh*. И такъ ежели вообразимъ себѣ, что бокъ *ab* имѣетъ въ себѣ семъ такихъ равныхъ частей, каковыхъ бокъ *bd* содержитъ въ себѣ

три части, и когда изъ точекъ коими бокъ ab раздѣлился на равныя части, проведутся линѣи параллельно къ ac и bc: то бока bk, bc, dk и ac раздѣлятся на столько жъ между собою равныхъ частей, сколько бокъ bd и ab равныхъ частей имѣютъ; того для, будетъ $bd : ab = 3 : 7$, $bk : bc = 3 : 7$ и $dk : ac = 3 : 7$ (ариф. 214); слѣдовательно $bd : ab = bk : bc = dk : ac$ (ариф. 229), то есть $ae : ab = eh : bc = dh : ac$. ч. д. н.

Слѣдст. I. Изъ того жъ слѣдуетъ, что высоты bo и bp подобныхъ треугольниковъ bdk и abc, содержатся какъ сходственные бока; ибо $db : ab = 3 : 7$, $dk : ag = 3 : 7$ также $bo : bp = 3 : 7$ посему $bo : bp = dk : ac$.

Слѣдст. II. Когда $bd : ab = bk : be$; то будетъ и $ab - bd : bd = bc - bk : bk$ (ариф. 228), то есть $ad : bd = ck : bk$, или $bd : ad = bk : kc$, также $ad : kc = bd : bk$ (ари. 227).

Слѣдст. III. Изъ вышеписаннаго слѣдуетъ, что во всякомъ треугольникѣ, сколько бы ни было проведено линѣй въ параллель основанїю, то части боковъ $fg : ga$ и $mn : nc$ находящїяся между параллельныхъ линѣй будутъ геометрически пропорцїональны, то есть, $fg : ga = mn : nc$. Ибо $fg : ag = 2 : 3$, также $mn : nc = 2 : 3$; слѣдовательно и $fg : ga = mn : nc$ (ариф. 229). 105.

105. ТЕОРЕМА. *Когда въ треугольникахъ deh и abc. уголъ e = углу b и бока de : ab и eh : bc составляющїе равные углы пропорцїональны; то такїе треугольники будутъ подобны.*

Доказ. Сдѣлай $bd = ed$, изъ точки d проведи линѣю dk параллельно къ ac, ф. 90 треугольники abc, dbk будутъ подобны (103); чего ради bd или $ed : ab = bk : bc$ (104), и $ed : ab = eh : bc$ по положенїю, слѣдственно $bk : bc = eh : bc$, но $bc = bc$, того ради $bk = eh$. По сему треугольникъ bdk равенъ треугольнику edh (30). Треугольникъ же bdk подобенъ abc, слѣдовательно и треугольникъ edh подобенъ abc.

106. ТЕОРЕМА. *Ежели всѣ бока треугольника edh пропорцїональны бокамъ другаго треугольника abc, то есть, когда $ed : ab = eh : bc = dh : ac$, то такїе треугольники будутъ подобны.*

Доказ. На бокѣ ab треугольника abc, опредѣли $bd = ed$, изъ точки d проведи линѣю dk параллельно ac, будетъ треугольникъ bdk подобенъ abc (103); чего ради $bd : bk = ab : bc$ (104) $= ed : eh$ по положенїю, по сему $bd : bk = ed : eh$, но $bd = ed$, слѣдовательно $bk = eh$; также $bd : dk = ab : ac$ (103) $= de : dh$ по положенїю, по сему $bd : dk = de : dh$ ф. 90 (ариф.

(ариф. 218); но $bd = de$, того ради $dk = dh$, и треугольникъ $deh = dbk$ (33); треугольникъ же bdk подобенъ abc, слѣдовательно и deh подобенъ треугольнику abc.

107. ЗАДАЧА. *Къ двумъ даннымъ линѣямъ A и C найти третью пропорціональную меньшую.*

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ hei, отъ верьха e опредѣли линѣю ef равну
ф. 91 данной большой C, отъ f линѣю fi равну меньшой A и $eg = A$, точки f и g соедини прямою линѣею gf; а изъ i проведи линѣю ih въ параллель gf, будетъ gh третья пропорціональная.

Доказ. Понеже gf параллельна hi, того ради треугольникъ egf подобенъ eih, по сему $ef : fi = fg : gh$, то есть $C : A \doteq A : gh$ или $\div C : A : gh$ (104); слѣдственно gh есть требуемая линѣя.

108. ЗАДАЧА. *Къ тремъ даннымъ линѣямъ A, B, C найти четвертую пропорціональную большую.*

Рѣшен. Сдѣлай произвольной уголъ hdg.
ф. 92 Отъ верьха d опредѣли $de = A$, $eg = B$, $df = C$, потомъ точки e и f соедини прямою линѣею ef, а изъ точки g проведи gh въ параллель ef, будетъ линѣя fh четвертая пропорціональная.

Доказ.

Доказ. Понеже ef параллельна линѣе gh, по сему треугольникъ def подобенъ dgh, чего ради $de : eg = df : fh$ (104), то есть $A : B = C : fh$; слѣдовательно fh есть четвертая пропорцїональная (100).

109. ЗАДАЧА. *Къ даннымъ двумъ линѣямъ A и B сыскать четвертую пропорцїональную линѣю въ продолжающейся геометрической пропорцїи.*

Рѣшен. Сдѣлай по изволенїю уголъ icf. Отъ верьха онаго опредѣли cd равну большой данной линѣе B, $cg = A$ и $de = A$, изъ e протяни eh въ параллель gd, будетъ gh третья пропорцїональная (107); потомъ сдѣлай $ef = gh$, проведи изъ f линѣю fi въ параллель he, будетъ линѣя hi требуемая. ф. 93

Доказ. Въ треугольникѣ cfi линѣи gd, he и if параллельны между собою по рѣшенїю, чего ради $cd : (de)cg = cg : gh$, то есть, $B : A = A : gh$ (104); и такъ gh есть третья пропорцїональная (101). Также (de) cg : (ef) $gh = gh : hi$ (104); чего ради $cd : cg = cg : gh = gh : hi$ по сему ÷ $cd : cg : gh : hi$ или ÷ $B : A : gh : ih$; слѣдовательно hi есть четвертая пропорцїональная.

Примѣчан. Такимъ образомъ сыщется пятая и болѣе пропорцїональная линѣя непрерывной геометрической пропорцїи.

110. ЗАДАЧА. *Линѣю AB раздѣлить такъ въ пропорціональныя части, какъ другая cd раздѣлена въ точкахъ e и i.*

Рѣшен. У точки *c*, раздѣленной линѣи
ф. 94 *cd*, сдѣлай по соизволенію уголъ *gcd*. Отъ верха *c*, опредѣли линѣю *cg* = данной *AB*, точки *g* и *d* соедини прямою линѣею *gd*, потомъ изъ точекъ *e* и *i* проведи *ef* и *ih* въ параллель *dg*, при чемъ линѣя *cg* равная данной *AB* раздѣлится такъ въ пропорціональныя части, какъ раздѣлена *cd*.

Доказ. Ибо въ треугольникѣ *cdg* линѣи *ih*, *ef* параллельны *dg*, того ради *ci* : *ch*=*ie* : *hf* = *ed* : *fg*; слѣдовательно части *ch* : *hf* : *fg* линѣи *cg*, которая равна данной *AB* имѣютъ такое жъ содержаніе какое части *ci* : *ei* : *ed* линѣи *cd*.

111. ЗАДАЧА. *Данную линѣю ab раздѣлить въ содержаніи чиселъ* 3 : 5 : 2.

Рѣшен. Уточки *a* данной линѣи *ab*,
ф. 95 сдѣлай по соиволенію уголъ *bac*. Отъ верьха *a* на линѣѣ *ac* положи произвольной величины равныхъ частей 3 = *ae*, 5 = *ed*, 2 = *dc*; потомъ точки *b* и *c* соедини прямою линѣею *bc*, изъ точекъ *d* и *e* проведи *df* и *eg* въ параллель *bc*, при чемъ линѣя *ab* раздѣлится въ требуемыя пропорціональныя части.

Доказ.

Доказ. Понеже въ треугольникѣ abc линѣи eg и df параллельны bc, чего ради $ag : gf = ae : ed$ или $3 : 5$ и $gf : fb = ed : dc = 5 : 2$, посему $ag : gf : fb = 3 : 5 : 2$; слѣдовательно линѣя ab раздѣлена въ требуемомъ содержанiи.

112. ЗАДАЧА. ***Отъ данной линѣи*** ab ***отдѣлить*** $\frac{4}{7}$.

Рѣшенiе. У точки a сдѣлай произвольной величины уголъ bae. Отъ верьха a по линѣе ae положи семь равныхъ произвольной величины частей, точки b и e соедини прямою линѣею be, отсчитай отъ a до d 4 части $= ad$; потомъ изъ точки d проведи линѣю dc въ параллель be, которая отъ линѣи ab отдѣлитъ линѣю ac $= \frac{4}{7}\ ab$. ф. 96

Доказ. Поелику dc параллельна be по рѣшенiю, то будетъ $ad : ae = ac : ab$ (104), но $ad = \frac{4}{7} ae$; слѣдовательно и $ac = \frac{4}{7}\ ab$.

113. ЗАДАЧА. ***Начертить маас-штабъ или размѣръ геометрической.***

Рѣшен. На прямой линѣе возьми десять равныхъ частей, и разстоянiе ab которое десять равныхъ частей занимаетъ, перенеси на линѣю ac сколько разъ можно; есть ли кто доволствоватся хочетъ въ размѣренiи десятыми частьми ф. 97

ми мѣры ab, то маас-штабъ уже и сдѣланъ. Но ежели кто стараясь о точности, и сотенныхъ частей оставить не хочетъ, тотъ къ линѣе ac, подъ какимъ нибудь угломъ, но способнѣе подъ прямымъ, поставить долженъ линѣю ad, и на оной взять по произволенїю десять равныхъ частей $a1$, $a2$, $a3$, и проч. чрезъ каждую точку 1, 2, 3, и прочая провесть параллельныя линѣи къ ac, и на последнюю df перенесть десять такихъ же частей, на какїя ab раздѣлена. Потомъ ежели проведешь линѣи bs, $1t$, $2v$, $3x$ и проч. даже до gd, то размѣръ или маасштабъ геометрической будетъ сдѣланъ. И ежели ab означать будетъ сажень геометрическую: то $b1$, 12, 23, и проч. будетъ означать футы, $1g$ одинъ дюймъ $2h$ два дюйма, $3k$ три дюйма и такъ далѣе.

Доказ. Что $b1$, 12, 23 и проч. означать будутъ футы то всякъ видѣть можетъ. А понеже $1g$, $2h$, $3k$ и проч. параллельны линѣе se, то будетъ $be : b1 = se : 1g$, но $b1 = \frac{1}{10}\ be$; слѣдовательно $1g$ будетъ $= \frac{1}{10}\ se$. Равнымъ образомъ доказано будетъ что $2h$ два дюйма, $3k$ три и такъ далѣе. А ежели ab будетъ означать футъ; то $b1$, 12, 23 и проч. будутъ дюймы, $1g$ одна линѣя, $2h$ двѣ линѣи, $3k$ три линѣи и такъ далѣе.

Примѣч. I. Ежели случится дѣлать маасштабъ не по геометрической, но по какой ни есть

другой мѣрѣ, на пр. по Россійской употребительной: то на линѣе ab надлежитъ положить семь, а на перпендикуляръ ad двенатцать частей, для того что Россійская сажень раздѣляется на 7 футовъ, а футъ на 12 дюймовъ, поступая въ прочемъ по вышеписанному будетъ сдѣланъ маас-штабъ Россійской мѣры. По сему должно разсуждать и о прочихъ мѣрахъ, смотря по раздѣленію оныхъ.

Примѣч. II. Что до употребленія помянутаго маас-штаба касается, то по оному вымѣриваются линѣи, или бока данной прямолинѣйной фигуры, на примѣръ: когда на длежитъ данную линѣю вымѣрять по маас-штабу, то смѣрявъ величину оной циркулемъ положи разтвореніе его на маас-штабѣ af такимъ образомъ, чтобъ одна нога циркула находилась на перпендикулярѣ rr, а другая на показанныхъ на маас-штабѣ дюймахъ. Положимъ что разтвореніе циркула равное вымѣрянной линѣе ляжетъ отъ u до q, то считай сколько отъ u до q саженъ футовъ и дюймовъ, а понеже линѣя uq представляетъ на маас-штабѣ 3 сажени 4 фута и 6 дюймовъ, слѣдственно вымѣренная линѣя равна $3^o, 4', 6''$.

114. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ dae линѣя bc параллельна основанію de извѣстны части $ab = 50'$, $bd = 20'$, $ac = 40'$, $bc = 60'$ сыскать часть ec и основаніе de.*

Рѣшен. Поелику треугольникъ abc подобенъ ade, то будетъ содержаться ф. 98
ab къ ad какъ bc къ de (104), также содержится ab къ bd какъ ac къ ce.

Числами.

$50' + 20' = 70' = ab + bd = ad$

$ab : ad = bc : de$ и $ab : bd = ac : ce$

$50' : 70' = 60'$ $50' : 20' = 40'$

```
   60                 40
 ------             ------
50)4200(84' = de    50)800(16 = ce
   400                 50
  -----              ------
    200                300
    200                300
```

115. ЗАДАЧА. *въ треугольникѣ ade линѣя bc параллельна основанїю de, извѣстны ad = 70', bc = 60', ce = 16', de = 84' сыскать части ab, bd и ac.*

Рѣшен. Для подобства треугольниковъ *abc* и *ade*, будетъ *de* : *bc* = *ad* : *ab*, то есть 84' : 60' = 70' : 50' = *ab*, *ad* − *ab* = *bd* = 70' − 50' = 20'; потомъ *db* : *ab* = *ce* : *ac*, то есть

```
20' : 50' = 16'
            50
          -----
20)800(40' = ac.
   80
```

116. ЗАДАЧА. *Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ abc и ade извѣстны ac = 40', ce = 16', ab = 50', de = 84' сыскать bd и bc.*

Рѣшен.

Рѣшен. Поелику треугольникъ *abc* подобенъ *ade*, того ради сдѣлай слѣдующую пропорцїю, $ae : ac = de : bc$, также и $ac : ce = ab : bd$ (104), то есть

$56' : 40' = 84' : bc$ и $40' : 16' = 50' : bd$

84	50
56)3360(60′ = *bc*	40)800(20′ = *bd*
3360	80

117. ЗАДАЧА. *Трапецїи dbce извѣстны бока de = 84′, bc = 60′, bd = 20′, ec = 16′ сыскать дополненїи оной ab и ac.*

Рѣшен. Изъ точки *c* проведи линѣю *cf* параллельно боку *bd*, продолжи *db* и *ec* пока пересѣкутся въ точкѣ *a*; при чемъ будетъ $cf = bd$, $bc = df$ (50), по сему изъ *de* вычтя *df* останется *ef*, и для подобїя треугольниковъ *efc* и *bca* сдѣлай слѣдующую пропорцїю, $ef : bc = ec : ac$, также $ef : bc = cf : ab$, то есть

$84' - 60' = 24' = ae - df = ef.$

$24' : 60' = 16' : ac$ и $24' : 60' = 20' : ab$

16	20
24)960(40 = *ac*	24)1200(50 = *ab*
96	120

118. ЗАДАЧА. *Въ двухъ прямоугольныхъ треугольникахъ aed и bce, извѣстны перпендикуляры bc = 60″ и*

ad = 84'' *и сумма ихъ основаній ae + be = ab = 120'', сыскать be и ae.*

Рѣшен. Проведи *df* параллельно къ *ab*
ф. 99 пока пересѣчется съ продолженною *cb* въ точкѣ *f*; при чемъ будетъ *ad* = *bf* и *ab* = *df* (50), и для подобія треугольниковъ *dcf* и *bec*, будетъ (*cb* + *bf*)*cf* : *bc* = *df*(*ab*) : *be*, то есть, какъ сумма перпендикуляровъ *cb* + *ad* содержится къ одному *bc*, такъ сумма основаній *ae* + *be* къ основанію *be*; которое вычтя изъ *ab*, получишь *ae*, какъ изъ слѣдующаго видно.

60'' + 84'' = 144'' = *cb* + (*ad*)*bf* = *cf*.
144'' : 60'' = 120'' : *be*.
  120
144)7200(50'' = *be*.
  720
120'' − 50'' = 70'' = *ab* − *be* = *ae*.

справедливость вышеписанныхъ рѣшеній видна изъ § 104.

119. Задача. *Въ двухъ подобныхъ треугольникахъ abc и ade извѣстны, треугольника ade сумма боковъ ad + de + ae = 210', и бока ab = 50', bc = 60', ac = 40' треугольника abc; сыскать бока ad, ae, ed треугольника ade.*

Рѣшен. Для подобства треугольниковъ
ф. 98 *abc* и *ade* будетъ *ab* + *bc* + *ca* : *ad* + *de* + *ea*

$+ ea = bc : de$, то есть, какъ сумма боковъ треугольника abc содержится къ суммѣ боковъ треугольника dae, такъ основанїе bc къ основанїю de. Потомъ посылай $bc : de = ab : ad$, и наконецъ $bc : de = ac : ae$, какъ слѣдуетъ:

$60' + 50' + 40' = 150' = bc + ab + ac.$

$150' : 210' = 60' : de.$ $60' : 84' = 50' : ad.$

```
      60                     50
   ---------               -----
150)12600(84' = de      60)4200(70' = ad
    1200                   420
   -----
     600
     600
```

$60' : 84' = 40' : ae$

```
      40
   --------
 60)3360(56' = ae
    300
   -----
     360
     360
```

$70' - 50' = 20' = ad - ab = db.$ $56' - 40' = 16' = ae - ac = ce.$

Доказ. Понеже $ab : ad = ac : ae = bc : de$ (104), чего ради $ab + ac + bc : ad + ae + de = bc : ed$ (ариф. 241); слѣдовательно пропорцїя справедлива. Истинна прочихъ пропорцїй видна изъ доказательства предъидущихъ задачь.

120. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ abc, когда уголъ b раздѣлится*

 линѣею

линѣею be по поламъ, то будетъ bc : ab = ec : ae , также bc + ab : ac = bc : ec = ab : ae.

Доказ. Продолжа *bc*, опредѣли *bd* = *ab*,
ф.100 точки *a* и *d* соедини прямою линѣею *ad*, будетъ уголъ *bad* = *adb* (32), уголъ *abc* = *bad* + *adb* (53), по сему ($\frac{1}{2}$ угла *abc*) *ebc* = *adb*; чего ради линѣя *ad* параллельна *be* (49), и уголъ *ceb* = *cad* (48), по сему треугольники *ecb* и *acd* имѣющіе общій уголъ *c* между собою подобны (103), и потому *bc* : (*bd*) *ab* = *ec* : *ae* (104); также *cd* или *bc* + (*bd*)*ab* : *ac* = *bc* : *ec* = (*bd*)*ab* : *ae*. ч. д. н.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, когда
ф.101 въ прямоугольномъ треугольникѣ *acb* острой уголъ *c* раздѣлится въ нѣсколько равныхъ частей, и проведутся линѣи *cd*, *ce* и проч. то отрѣзки *ad*, *de*, *eb* основанія *ab*, отъ прямаго угла *a* увеличиваются. Ибо по предъидущей теоремѣ въ треугольникѣ *ace* будетъ *ac* : *ce* = *ad* : *de*; но *ce* > *ac*, поелику уголъ *a* прямой, а уголъ *aec* острой (56), слѣдственно и *de* больше *ad* (ариф. 202). Также въ треугольникѣ *dcb* будетъ *cd* : *bc* = *de* : *eb*, но *bc* > *cd*, потому что уголъ *bdc* больше угла *dbc*, чего ради *be* > *de*; слѣдовательно *be* > *de* > *ad*.

121. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc, уголъ abc линѣею be раздѣленъ на двѣ*

равныя

равныя части, извѣстна сумма боковъ $ab + bc = 144'$ и части основанія $ae = 50'$ и $ec = 70'$ сыскать бока ab и bc.

Рѣшен Сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ основаніе ac содержится къ отрѣзку ec, такъ сумма боковъ $ab + bc$ къ боку bc, которой вычти изъ найденнаго количества получишь бокъ ab, то есть ф.100

$50' + 70' = 120' = ae + ec = ac$

$120' : 70' = 144' : bc \quad 144 - 84 = 60' = ab$

$$\begin{array}{r} 70 \\ \hline 120)10080(84' = bc \\ 960 \\ \hline 480 \\ 480 \end{array}$$

Доказательство смотри въ (§.120).

122. ТЕОРЕМА. Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc, когда изъ прямаго угла b на діогональ ac опустится перпендикуляръ bm: то оной будетъ средняя пропорціональная между отрѣзковъ, am и mc, и каждой бокъ ab и bc изъ составляющихъ прямой уголъ b есть средняя пропорціональная между діогональю ac исходственнымъ отрѣзкомъ.

Доказ. Ибо уголъ $mbc + mcb = 90$ град. и уголъ $abm + mbc = 90$ град. (53), ф.102

по сему уголъ $mcb = abm$, (ариф. § 34), и уголъ $amb = bmc$ прямые, чего ради и уголъ $mab = mbc$ (53); слѣдовательно треугольникъ amb подобенъ mbc. Также треугольникъ amb подобенъ abc, поелику уголъ a общій, уголъ $amb = abc$ прямые, и уголъ $abm = acb$ (53). Треугольникъ abc подобенъ bmc; ибо уголъ $bmc = abc$ прямые, уголъ $mbc = cab$, и уголъ c есть общій; чего ради будетъ 1е изъ подобныхъ треугольниковъ amb и mbc, $am : bm = bm : mc$, то есть $\div am : bm : mc$. 2е для подобныхъ треугольниковъ amb и abc, $am : ab = ab : ac$, то есть $\div am : ab : ac$. 3е для треугольниковъ abc и bmc, $mc : bc = bc : ac$, то есть $\div mc : bc : ac$, слѣдовательно показанныя линѣи суть пропорціональны. (101).

123. **Опредѣленіе.** *Вписанная въ кругѣ фигура* есть та, которой всѣ верьхи угловъ фигуры находятся на окружности круга. *Описанная около круга фигура* есть та, которой бока касаются окружности круга.

124. **ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ def начертить треугольникъ подобенъ данному abc.***

Рѣшен. Проведи въ данномъ кругѣ про-
ф. 103 извольно хорду ed, сдѣлай уголъ $def =$ углу abc (45), протяни df, потомъ сдѣлай уголъ $fdg = cab$, на конецъ точки

g

g и f соединя прямою линѣею gf, треугольникъ dgf будетъ желаемой.

Доказ. Ибо уголъ $cab = fdg$, и уголъ $abc = def$ по рѣшенїю $= dgf$ (91); по сему и уголъ $acb = dfg$ (53), слѣдовательно треугольникъ abc подобенъ dgf (103).

125. **ЗАДАЧА.** *Около даннаго круга kgi начертить треугольникъ подобенъ данному abc.*

Рѣшен. Основанїе треугольника abc продолжи въ обѣ стороны до m и d. Сыщи центръ круга e (80), проведи радїусъ eg, сдѣлай уголъ $gei = dcb$, уголъ $gel = mab$ (45); потомъ чрезъ точки g, i и l проведи линѣи fh, kh и kf перпендикулярно къ радїусамъ eg, ei, el (58), кои взаимно пересѣкшись въ точкахъ f, h и k опредѣлятъ желаемой треугольникъ fhk. ф. 104.

Доказ. Въ четвероугольникѣ $geih$ углы i и g прямые по рѣшенїю, по сему уголъ $gei + ghi$ = двумъ прямымъ угламъ или 180 град. (64); также уголъ $dcb + acb =$ 180 град. (16), чего ради уголъ $gei + ghi = dcb + acb$: но уголъ $gei = dcb$ по положенїю; слѣдовательно уголъ $ghi = acb$. Подобнымъ образомъ докажется, что уголъ gfl = углу cab и уголъ fkh = углу abc.

О ПЛАНИМЕТРІИ или ИЗМѢРЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

126. *Опредѣленіе. Планимѣтрія* есть часть геометріи, которая учитъ измѣрять повѣрьхности разныхъ геометрическихъ фигуръ.

127. ТЕОРЕМА. *Всякой параллелограмъ* db *діогоналію* ac, *дѣлится на двѣ равныя части.*

No 1. ф. 23 *Доказ.* Треугольникъ $abc = adc$ по тому, что $ab = dc$, $ad = bc$ (27), и ac обоимъ треугольникамъ общая (33); слѣдственно параллелограмъ $abcd$ діогональю ac разделенъ на двѣ равныя части.

128. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ параллелограмѣ діогональ одна другую дѣлитъ на двѣ равныя части.*

No 2. ф.105 *Доказ.* Понеже $ab = dc$ по положенію, уголъ $bae = ecd$ и уголъ $abe = edc$ (48), чего ради треугольникъ $abe = dec$ (31), по сему $be = de$ и $ae = ec$; слѣдственно діогонали ac и db одна другою въ точкѣ e раздѣлились на двѣ равныя части.

129. ТЕОРЕМА. *Параллелограмы* $acbd$ *и* $bcef$, *имѣющіе одно основаніе* bc *и равныхъ высотъ, или заключающіеся между параллельныхъ линѣй* bc *и* af *равны между собою.*

Доказ.

Доказ. Въ треугольникахъ abe и cdf, бокъ $ab = dc$, $be = cf$ (27), и $ae = df$; ибо (ad) $bc = ef$, а придавъ къ симъ общую линѣю de будетъ ($ad + de$) $ae =$ ($dc + ef$) df; посему треугольникъ abe $= cdf$ (33); отъ коихъ отнявъ общїй треугольникъ die, останется трапецїя $cief$ равна трапецїи $badi$, наконецъ придавъ къ симъ треугольникъ bci, будетъ параллелограмъ $befc$ равенъ параллелограму $abdc$. ф. 106.

Слѣдст. I. Изъ чего видно, что треугольникъ bcf, имѣющїй съ параллелограмомъ bd одно основанїе bc и равную высоту fg, равенъ половинѣ параллелограма $abcd$.

Слѣдст. II. Того ради треугольники abc и bcf равныхъ основанїй и высотъ, равны между собою; поелику каждой равенъ половинѣ параллелограма $abcd$ и $bcfe$ кои равны между собою.

130. ТЕОРЕМА. *Треугольникъ abc равенъ параллелограму af имѣющему одно основанїе ab, а высоту gd, равну половинѣ высоты gc треугольника abc.*

Доказ. Понеже треугольникъ abc равенъ половинѣ параллелограма ah (129): но какъ $ab = ef$ и $gd = dc$ по положенїю, чего ради параллелограмъ af равенъ паралелло- ф. 107.

лелограму eh (129), и равенъ половинѣ параллелограма ah; слѣдовательно равенъ треугольнику abc.

131. ТЕОРЕМА. *Треугольникъ abc равенъ параллелограму af, имѣющему высоту равну общей высотѣ ce, а основанiе ad, равно половинѣ основанiя ab треугольника abc.*

Доказ. Треугольникъ abc равенъ поло-
ф.108 винѣ параллелограма $abgh$ (129); но какъ $ad = bd$ и высота ce въ разсужденiи параллельныхъ линѣй общая, по сему параллелограмъ $af = dg$ (129), и каждой равенъ половинѣ параллелограма $abgh$; слѣдовательно параллелограмъ af равенъ треугольнику abc.

132. *Опредѣлен.* Для измѣренiя плоскостей берется квадратная плоскость опредѣленной величины за единицу, какъ то квадратная сажень, квадратной футъ и проч.

Примѣчан. *Квадратная сажень* есть квадратъ, котораго бока по сажени. *Квадратной футъ* есть квадратъ, котораго бока по футу и такъ далѣе.

133. ТЕОРЕМА. *Плоскость прямоугольника $abdc$, равна произведенiю основанiя ac на высоту ab.*

Доказ.

Доказ. Положимъ, что основанїе ac имѣетъ пять, а высота ab три фута. ф.109
Раздѣля основанїе ac на пять, а высоту ab на три равныя части (102), изъ точекъ раздѣленной ac, проведи параллельныя къ ab, также изъ точекъ раздѣленной ab, проведи fh и eg параллельно къ ac; при чемъ произойдутъ три равныя прямоугольника ah, fg и ed (129), изъ коихъ въ каждомъ будетъ пять квадратныхъ футовъ равныхъ квадрату $amgf$, каковыхъ въ трехъ равныхъ параллелограмахъ будетъ пятнатцать; то жъ самое произойдетъ и отъ умноженїя основанїя ac на высоту ab, то есть $ac \times ab$ или $5' \times 3' = 15''$ квадратнымъ футамъ, составляющимъ плоскость параллелограма $abdc$.

Слѣдст. I. Понеже квадратъ ad есть такой прямоугольникъ, котораго бока ac ф.110
и ab равны, чего ради плоскость онаго равна произведенїю бока ac или ab, самаго на себя умноженнаго, то есть $ac \times ab = ac \times ac$ *)

Слѣдст. II. Того ради плоскость всякаго параллелограма ag равна произведенїю ф.111
высоты gh на основанїе ab умноженной; то

*) И такъ площадь квадрата означать будемъ чрезъ $\overline{ac}^2$, при чемъ надлежитъ выговаривать, квадратъ изъ линѣи ac.

то есть $= gh \times ab$. Ибо прямоугольникъ $dcfe$ равенъ параллелограму ag, имѣющему основанiе $dc = ab$ и общую высоту gh (129). *)

ф. 106 *Слѣдст.* III. Изъ того жъ явствуетъ, что плоскость всякаго треугольника bcf равна произведенiю основанiя bc, на половину высоты fg, или равна произведенiю высоты чрезъ половину основанiя; и равна также половинѣ произведенiя высоты основанiемъ умноженнаго. Ибо треугольникъ bcf равенъ половинѣ параллелограма bf, имѣющаго одно основанiе bc и одну высоту fg (129.130.131). **)

Слѣдст. IV. Понеже квадратная сажень имѣетъ въ основанiи и высотѣ своей по 7 ми обыкновенныхъ футъ, того ради оная будетъ имѣть семью семь квадратныхъ футъ, то есть 49″; также квадратнаго фута основанiе и высота имѣютъ по 12 дюймовъ, по сему площадь онаго будетъ имѣть двенатцатью двенатцать квадратныхъ дюймовъ, то есть 144 квадр. дюйм. слѣдовательно геометрическая (деся-

---

*) При означенiи площади параллелограма чрезъ $gh \times ab$, принимается одна величина за снованiе а другая за высоту, и выговаривается, параллелограмъ изъ линѣй gh и ab.

**) При площади треугольника означающейся чрезъ $\frac{1}{2}gf \times bc$ тожъ должно разумѣть что сказано о параллелограмѣ.

пятичная) квадратная сажень будетъ имѣть 100 квадратныхъ футъ, а футъ 100 квадратныхъ дюймовъ и такъ далѣе.

Слѣдст. V. Изъ предъидущей теоремы и слѣдствїевъ видно, когда линѣйныя сажени умножатся линѣйными саженьми, то въ произведенїи будутъ квадратныя сажени; а ежели линѣйные футы умножатся линѣйными футами, въ произведенїи будутъ квадратные футы, и такъ далѣе. И обратно, естьли площадь какой нибудь фигуры опредѣленная извѣстнымъ количествомъ квадратной мѣры, раздѣлится на линѣйную мѣру, въ частномъ числѣ будетъ линѣйная жъ или простая мѣра.

134. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* $ab = 15^\circ$ *квадрата* ad, *сыскать онаго площадь.*

Рѣшен. Бокъ ab умножь самого на себя получишь желаемую площадь квадрата (133), то есть $15^\circ \times 15^\circ = 225^\circ$ квадратныхъ сажень, есть площадь квадрата ad. No I. ф. 25

Слѣдст. Изъ чего видно, когда будетъ площадь квадрата ad извѣстна: то онаго бокъ ab, будетъ равенъ квадратному корню изъ площади квадрата ad. На пр. когда площадь квадрата $ad = 225^\circ$, то $\sqrt[2]{225^\circ} = 15^\circ$ есть бокъ ab квадрата ad.

Примѣч.

Примѣчаніе. Есть ли бокъ квадрата *ab* данъ будетъ въ саженяхъ и футахъ, то прежде всего должно привести все оное въ футы, потомъ умножить квадратно, получишь площадь квадрата въ квадратныхъ футахъ, изъ коихъ выключа квадратныя сажени (133), будешь имѣть желаемую площадь квадрата. И обратно когда дана будетъ площадь квадрата въ саженяхъ и футахъ квадратныхъ, то должно оныя привесть въ квадратные футы; потомъ найтить квадратной корень, получишь желаемой бокъ *ab* квадрата *ad* въ футахъ; изъ коихъ выключа сажени, сыщется требуемой бокъ *ab* въ саженяхъ.

135. ЗАДАЧА. *По даннымъ, основанію ad = 32° и высотѣ cg = 13°, 4′ Россійской мѣры, сыскать площадь параллелограма ac.*

Рѣшен. Основаніе *ad* равно и высоту
ф. 23 *cg* приведи въ футы, потомъ умножь основаніе на высоту, будетъ площадь паралелограма *ac* состоящая изъ квадратныхъ футовъ; на конецъ приведя оныя въ квадратныя сажени, получишь требуемую площадь, то есть

$$\begin{array}{r} 13^\circ + 4' \\ 7 \\ \hline 91 \\ 4 \\ \hline 95 = cg \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32^\circ \\ 7 \\ \hline 224 = ad \end{array}$$

```
   224′ = ad
      95
    1120
    2016
49)21280 (434°, 14′ квадрат. =
   196          ad × cg = площади парал-
    168                   лелограма ac
    147
     210
     196
      14′
```

136. ЗАДАЧА. *По данной площади параллелограма abcd = 3280° и основанїю ad = 80°, сыскать онаго высоту cg.*

Рѣшен. Площадь параллелограма *abcd*, раздѣли на основанїе *ad*, получишь требуемую высоту *cg*, то есть

```
80) 3280 (41° = высотѣ cg.
    320
      80
      80
```

137. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ acd, извѣстна высота cm = 60°. 4′ и основанїе ad = 140°. 2′. 4″ французской мѣры, сыскать площадь онаго.*

Рѣшен. Приведя мѣру высоты *cm* и основанїя *ad* въ дюймы, умножь высоту ф. 27 и 28 на

на половину основанїя, или основанїе на половину высоты, произшедшее отъ того произведенїе, то есть квадратные дюймы, приведи въ тоазы, футы и проч. получишь требуемую площадь треугольника *acd*; то есть

$$
\begin{array}{l}
cm = 60^{\circ} + 4' \\
\quad\;\; 6' \\
\hline
360' \\
\quad 4' \\
\hline
364' \\
\quad 12'' \\
\hline
728 \\
364 \\
\hline
\dfrac{4368''}{2} = 2184'' = \tfrac{1}{2}cm
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
ad = 140^{\circ} + 2' + 4'' \\
6' \\
\hline
840' \\
2' \\
\hline
842' \\
12'' \\
\hline
1684 \\
842 \\
\hline
10104'' \\
4'' \\
\hline
10108'' = ad \\
2184'' \\
\hline
40432 \\
80864 \\
10108 \\
20216 \\
\hline
22075872''
\end{array}
$$

$6 \times 6 = 36$ квадратн. фут. въ тоазѣ.

$$
\begin{array}{r}
\times 144 \\
\hline
144 \\
144 \\
36 \\
\hline
5184
\end{array}
$$

5184 квадр. д. въ тоазѣ.

22075872'' квадр. дюй. = площади треугольника *adc*.

$5184)22075872(4258^{\circ}.16''.96^{IV}$ квадратныхъ $= \frac{1}{2}cm \times ad =$ площади треугольника *acd*.

138.

138. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади треугольника acd = 3780° и основанїю ad = 180° десятичной мѣры, сыскать высоту cm.*

Рѣшен. Данную площадь треугольника *acd*, раздѣли на половину основанїя *ad*, получишь требуемую высоту *cm*, то есть ф. 28

$$\frac{180^\circ}{2} = 90^\circ = \tfrac{1}{2}\, ad$$

90) 3780(42° = высотѣ *cm*.
360
180
180

Прибавленїе. Равнымъ образомъ по извѣстной площади и высотѣ *cm*, сыщется основанїе *ad* треугольника *acd*, когда площадь онаго раздѣлится на половину высоты *cm*.

139. ТЕОРЕМА. *Площади параллелограмовъ df и ag, имѣющихъ одинакую высоту gh, или заключающихся между параллельныхъ линѣй eg и dh содержатся между собою какъ ихъ основанїя dc и ab.*

Доказ. Понеже площадь прямоугольника $df = dc \times cf$. Площадь параллелограма $ag = ab \times (gh)cf$ (133), чего ради будетъ $dc \times cf : ab \times (gh)cf = dc : ab$. Ибо произведенїе крайнихъ $ab \times dc \times cf =$ произведенїю среднихъ $ab \times dc \times cf$ (ариф. 222); слѣдовательно пропорцїя по (§ 225. ариф.) справедлива. No 4 ф. III

Слѣдс.

Слѣдст. Площади треугольниковъ dcf и abg, имѣющихъ одну высоту $cf = hg$, содержатся какъ ихъ основанiя dc и ab. Ибо по предъидущей теоремѣ $dc \times cf : ab \times gh = dc : ab$, чего ради $\frac{1}{2}dc \times cf : \frac{1}{2}ab \times gh = dc : ab$ (ариф. 239); но $\frac{1}{2}dc \times cf$ = площади треугольника dcf, также $\frac{1}{2}ab \times gh$ = площади треугольника abg (133); слѣдовательно площадь треугольника dcf содержится къ площади треуголлника $abg = dc : ab$.

140. ТЕОРЕМА. *Площади параллелограмовъ A и B находятся въ сложномъ содержанiи ихъ основанiй и высотъ, или содержатся между собою какъ произведенiя ихъ основанiй чрезъ высоты.*

Доказ. Ибо площадь перваго $A = ap \times cd$, втораго $B = fp \times hi$ (133), того ради будетъ $A : B = ap \times cd : fp \times hi$, но содержанiе $ap \times cd$ къ $fp \times hi$ суть
ф. 112 произведенiя изъ содержанiй $cd : hi$ и $ap : fp$, по сему содержанiе $A : B$ есть сложное изъ содержанiй основанiя къ основанiю, и высоты къ высотѣ (ариф. § 252), слѣдовательно параллелограмы A и B находятся въ сложномъ содержанiи ихъ основанiй и высотъ, или содержатся между собою какъ произведенiя основанiй чрезъ высоты.

Слѣдст. 1. Изъ того явствуетъ, что площади треугольниковъ cad и hfi въ сложномъ содержанiи ихъ высотъ и основанiй; ибо треугольники cad и hfi суть половины параллелограмовъ, имѣющихъ одно основанiе и одну высоту: но половины содержатся какъ ихъ цѣлыя, слѣдовательно $\frac{1}{2} A : \frac{1}{2} B = ap \times cd : fp \times hi$ (ариф. 237).

Слѣдст.

Слѣдст. II. Площади параллелограмовъ $dcfe$ и abg будутъ равны, когда основанїе dc къ основанїю ab находится въ обратномъ содержанїи высотъ gh къ cf; ибо ежели $dc : ab = gh : cf$, то будетъ $cf \times dc = ab \times gh$, то есть площадь параллелограма $dcfe$ = площади параллелограма abg. ф. 111

141. *Опредѣл.* Ежели въ параллелограмѣ $abdc$, чрезъ произвольно взятую на дїогоналѣ точку f, проведутся линѣи kg и eh, параллельно бокамъ bd и ab; то произшедшїе отъ того параллелограмы bf и cf, называются ***дополненїи параллелограмовъ*** af и fd къ цѣлому ad. ф. 113

142. ТЕОРЕМА. *Дополненїи bf и cf параллелограмовъ fd и af къ цѣлому ad, равны между собою.*

Доказ. Треугольникъ $abd = acd$, и треугольникъ $afk = ahf$, также треугольникъ $fed = gdf$ (33); по сему $afk + fed = ahf + fgd$, которые вычтя изъ равныхъ треугольниковъ abd и acd останется, параллелограмъ fb равенъ параллелограму cf (ариф. 34).

143. ТЕОРЕМА. *Ежели прямая линѣя ab раздѣлится на двѣ какїя нибудь части ac и bc; то квадратъ изъ цѣлой ab равенъ суммѣ квадратовъ изъ неравныхъ частей ac и bc и двумъ прямоугольникамъ изъ тѣхъ же частей ac и bc.*

Доказ. Сдѣлай на ab квадратъ $abgi$ (69), проведи изъ точки c линѣю cm параллельно bg и дїогональ bi, чрезъ точку f общаго сѣченїя линѣю eh параллельно ab, будетъ уголъ $aib = abi$ (32) $= hfi$ (48); по сему $hf = hi$ (55) $= im = fm$ (50): уголъ ф. 114

же $mih = ihf = hfm = fmi$ прямые; того ради фигура $hfmi$ есть квадратъ $= \overline{ac}^2$ (133), для подобной причины и фигура $bcef$ есть квадратъ $= \overline{bc}^2$: но $cf = ef$ и $hf = fm$ (27), посему прямоугольникъ hc равенъ прямоугольнику me; слѣдовательно $\overline{ab}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ac}^2 + 2ac \times bc$.

144. ТЕОРЕМА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* abc, *квадратъ діогонали* ac *равенъ суммѣ квадратовъ прочихъ боковъ* ab *и* bc, *то есть* $\overline{ac}^2 = \overline{bc}^2 + \overline{ab}^2$.

Даказ. Изъ прямаго угла b на діогональ ac опусти перпендикуляръ bm, при
ф. 115 чемъ произойдутъ треугольники abm и bmc подобны треугольнику abc (122); чего ради $am : ab = ab : ac$ или hm. Также $mc : bc = bc : ac$ или hm, при чемъ $am \times hm = \overline{ab}^2$, и $mc \times hm = \overline{bc}^2$ (ариф. 223); но $am \times hm =$ площади прямоугольника fm, также $mc \times hm =$ площади прямоугольника hc (133). Посложеніи коихъ будетъ $fm + hc = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$, то есть $\overline{ac}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$.

Другимъ образомъ. Проведя изъ точки b линѣи bf и bg, а изъ точекъ a и c линѣи ak и ce, будетъ треугольникъ $ace = abf$. Ибо бокъ $ab = ae$ и $ac = af$ (27), уголъ $eac = baf$, потому что уголъ $eab = caf$ прямые, а придавъ къ симъ общій bac будетъ $(eab + bac)\ eac = (caf + bac)\ baf$;

Слѣд.

Слѣдовательно треугольникъ $ace = abf$ (30): но треугольникъ aec съ квадратомъ $abde$ имѣютъ одно основанïе ae и между параллельныхъ линѣй ae и dc; также треугольникъ abf съ параллелограмомъ $amhf$ имѣютъ одно основанïе af и между параллельныхъ линѣй af и bh; того ради треугольникъ $aec = \frac{1}{2}\overline{ab}^2$ и треугольникъ $(abf)aec = \frac{1}{2}ah$ (129). Посему $\overline{ab}^2 =$ прямоугольнику ah. Такимъ же образомъ докажется что треугольникъ $ack = \frac{1}{2}\overline{bc}^2 = \frac{1}{2}mg$, и что $\overline{bc}^2 =$ прямоугольнику mg слѣдовательно сумма $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = ah + mg = \overline{ac}^2$. ч. д. н.

Слѣдст. Квадратъ какого нибудь бока изъ составляющихъ прямой уголъ, равенъ разности квадратовъ изъ дïогонали ac и другаго бока bc, то есть $\overline{ac}^2 - \overline{bc}^2 = \overline{ab}^2$, также и $\overline{ac}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{bc}^2$.

145. ТЕОРЕМА. *Дïогональ bi квадрата $abgi$ точно измѣрять или вычислить не можно.*

Доказ. Положимъ что бокъ квадрата ab или $ai = 1$, посему $\overline{ab}^2 = 1$, также ф. 114 и $\overline{ai}^2 = 1$; и такъ $\overline{ab}^2 + \overline{ai}^2 = \overline{bi}^2 = 2$: но число 2 есть не квадратное, изъ коего

точнаго радикса (*корня*) сыскать не можно (ариф. 178); слѣдовательно діогональ квадрата точно измѣрять или вычислить не можно.

146. ЗАДАЧА. *По извѣстному основанію ac = 80′ и высотѣ ab = 60′ прямоугольнаго треугольника abc найти діогональ bc.*

Рѣшен. Основаніе *ac* умножь квадратно, также и высоту *ab* квадратно, изъ
No 1 суммы сихъ квадратовъ извлеки корень
ф. 20 квадрата, получишь требуемую діогональ *bc*, то есть

$80' \times 80' = 6400'' = \overline{ac}^2$. $60' \times 60' = 3600'' = \overline{ab}^2$

$3600'' = \overline{ab}^2$

$6400 = \overline{ac}^2$

$10000'' = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2$. $\sqrt[2]{10000''} = 100' = bc$

147. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ, діогонали bc = 90° и высотѣ ab = 60° прямоугольнаго треугольника abc, сыскать основаніе ac.*

Рѣшен. Изъ квадрата діогонали *bc* вычти квадратъ высоты *ab*, потомъ изъ разности сихъ квадратовъ, извлеки корень квадрата, получишь требуемое основаніе *ac*, то есть

90° ×

$90^\circ \times 90^\circ = 8100^\circ = \overline{bc}^2 \cdot 60^\circ \times 60^\circ = 3600 = \overline{ab}^2.$

$8100^\circ = \overline{bc}^2$

$3600 = \overline{ab}^2$

$4500 = \overline{bc}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{ac}^2. \sqrt[2]{4500} = 67^\circ, 08'' = ac$

Слѣдст. Такимъ же образомъ по извѣстной дїогонали *bc* и основанїю *ac* сыщется высота *ab*, когда изъ разности квадратовъ дїогонали *bc* и основанія *ac* извлечется квадратной корень.

148. ЗАДАЧА. *Дана площадь прямоугольнаго равнобедреннаго треугольника abc = 3200° сыскать бока ab и ac.*

Рѣшен. Изъ точекъ *a* и *c* проведя линѣи *ad* и *cd* параллельно бокамъ *bc* и *ab*, будетъ фигура *abcd* квадратъ. И такъ площадь треугольника *abc* удвоя получишь площадь квадрата *abcd*. Квадратной корень сея площади будетъ = боку *ab* = *bc*, на конецъ по извѣстнымъ *ab* и *bc* сыщется *ac* (146), то есть No4 ф. 116

$3200^\circ = \Delta abc$

$\times 2$

$6400^\circ = abcd = \overline{ab}^2. \sqrt[2]{6400^\circ} = 80^\circ = ab = bc$

$\times 2$

$12800^\circ = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ac}^2. \sqrt[2]{12800^\circ} = 113^\circ, 13'' =$ дїогонали *ca*.

Доказ. Понеже *ab* = *bc*, чего ради и уголъ *bac* = *acb* = 45 град. также уголъ

$bac = acd = cad = 45$ град. слѣдовательно уголъ $bac + cad = acb + acd = 90$ град. посему фигура $abcd$ есть квадратъ, и треугольникъ $abc = acd$; слѣдственно треугольникъ $abc \times 2 = \overline{ab}^2$ и $\sqrt{\overline{ab}^2} = ab$.

149. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку* $ab = 120°$ *равносторонняго треугольника* abc, *сыскать площадь онаго.*

Рѣшен. Изъ верьха c на основаніе ab
No 1. опусти перпендикуляръ cd, коимъ осно-
ф. 33 ваніе ab раздѣлится на двѣ равныя части въ точкѣ d; чего ради по извѣстной ad и ac сыщи высоту cd треугольника abc (147), потомъ сыщи площадь онаго (137), то есть.

$$120° = ab = ac.\quad \frac{120°}{2} = 60° = ad$$

$$120° \times 120° = 14400° = \overline{ac}^2$$

$$60° \times 60° = 3600° = \overline{ad}^2$$

$$10800 = \overline{ac}^2 - \overline{ad}^2 = \overline{cd}^2.$$

$$\sqrt[2]{10800°} = 103°,9' = cd.$$

$$2)120(60° = ad = \tfrac{1}{2}ab$$

$60° \times 103°.\ 9' = 6234° = \frac{1}{2}ab \times cd =$ площади треугольника abc (133).

150. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ* abc *извѣстны діогональ* $ab = 500°$ *и разность перпендикуляровъ* bc *и* $ac = bg = 100°$ *сыскать оные перпендикуляры.*

Рѣшен.

Рѣшен. Подолжа ag, изъ точки b опусти перпендикуляръ bd, которой будетъ $= gd$, умножь bg квадратно, изъ половины сего квадрата извлеки квадратной корень, получишь bd или gd. Потомъ въ треугольникѣ abd по извѣстнымъ ab и bd сыщи ad (147): изъ которой вычтя gd или bd останется ag; и наконецъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю $bg : ag = bd : ac$ или cg, и $cg + bg = bc$, то есть No 4 ф. 117

$$100^\circ \times 100^\circ = 10000^\circ = \overline{bg}^2 = \overline{gd}^2 + \overline{bd}^2$$

$$2)10000(5000^\circ = \tfrac{1}{2}\overline{bg}^2 = \overline{bd}^2 = \overline{gd}^2$$

$$\sqrt[2]{5000^\circ} = 70\ ,71'' = bd = gd.$$

$$500^\circ \times 500^\circ = 250000^\circ = \overline{ab}^2$$

$$5000^\circ = \overline{bd}^2$$

$$245000^\circ = \overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ad}^2$$

$$\sqrt[2]{245000^\circ} = 494^\circ,\ 97'' = ad$$

$$70^\circ,\ 71 = gd$$

$$424^\circ,\ 26'' = ad - gd = ag.$$

$$bg : ag = bd : ac$$

$$100^\circ : 424^\circ.26'' = 70^\circ,71'' : 299^\circ.99'' = ac = cg$$

$$100^\circ = bg$$

$$399^\circ,\ 99'' = cg + bg = bc$$

Доказ. Понеже $ac = cg$, слѣдственно уголъ $cag = agc$ (32) $= bgd$ (20) $= 45^\circ$ (53) $=$ углу gbd, посему $gd = bd$ (55) и $\overline{gd}^2 + \overline{bd}^2 = \overline{bg}^2$

$= \overline{bg}^2 = 2\,\overline{bd}^2$ (144); того ради $\frac{1}{2}\overline{bg}^2 = \overline{bd}^2$, и $V\overline{bd}^2 = bd = gd$, также $\overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ad}^2$ (144), $V\overline{ad}^2 = ad$, $ad - dg = ag$, а изъ подобныхъ треугольниковъ bgd и agc, $bg : ag = bd : ac$ или cg (104), и $cg + bg = bc$. ч. д. н.

151. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ тупоугольномъ треугольникѣ abc, квадратъ бока ac лежащаго противъ тупаго угла abc, безъ суммы квадратовъ другихъ боковъ ab и bc, равенъ двумъ прямоугольникамъ изъ основанїя ab и линѣи pb лежащей между тупымъ угломъ и перпендикуляромъ cp.*

ф. 118 *Доказ.* Изъ предъидущихъ теоремъ видно, что $\overline{ap}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{bp}^2 + 2ab \times bp$ (143), $\overline{bc}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{bp}^2$ (144) также $\overline{ac}^2 = \overline{pc}^2 + \overline{ap}^2$ ($\overline{ab}^2 + \overline{bp}^2 + 2ab \times bp$); и такъ; вычти изъ сего квадрата сумму квадратовъ $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{pc}^2 + \overline{bp}^2$, останется $\overline{ac}^2 - \overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = 2ab \times bp$. ч. н. д.

152. ЗАДАЧА. *Въ тупоугольномъ треугольникѣ abc извѣстны бока $ac = 140°$, $ab = 90°$, $bc = 70°$ сыскать площадь онаго.*

Рѣшен. Изъ точки c, на продолженное основанїе
ф. 119 ab опусти перпендїкуляръ cd потомъ изъ площади квадрата бока ac, вычти сумму квадратовъ боковъ ab и bc; остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, частное число раздѣли на основанїе ab, получишь bd. По извѣстной bc и bd, сыщется высота cd (147); потомъ

потомЪ умножь высоту *cd* половиною основанія *ba* будешь имѣть требуемую площадь (137).

Числами.

$$90^\circ \times 90^\circ = 8100^\circ = \overline{ab}^2$$

$$70^\circ \times 70^\circ = 4900^\circ = \overline{bc}^2$$

$$13000^\circ = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2.$$

$$140^\circ \times 140^\circ = 19600^\circ = \overline{ac}^2.$$

$$19600^\circ = \overline{ac}^2$$

$$13000 = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$$

$$6600^\circ = \overline{ac}^2 - \overline{ab}^2 - \overline{bc}^2 = 2ab \times bd.$$

$$2)6600^\circ(3300^\circ = ab \times bd.\ 90)3300(36^\circ,66'' = bd$$

$$36,66 \times 36,66 = 1343^\circ,9556^{IV} = \overline{bd}^2.$$

$$4900^\circ,0000^{IV} = \overline{bc}^2$$

$$1343\ ,9556^{IV} = \overline{bd}^2$$

$$3556^\circ,0444^{IV} = \overline{bc}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{cd}^2.$$

$$\sqrt[2]{3556^\circ,0444^{IV}} = 59^\circ,63'' = cd.$$

$$2)90(= 45 = \tfrac{1}{2}\,ab.$$

$$59^\circ,63'' \times 45^\circ = 2683^\circ,35'' = \tfrac{1}{2}ab \times cd =$$

площади треугольника *abc*.

ДругимЪ образомъ.

ИзЪ точки *c* радїусомЪ *cb* опиши кругЪ *befg*, продолжи *ab* и *ac* пока пересѣкутся сЪ окружностїю круга вЪ *e* и *f*, изЪ точки *c* опусти перпендикулярЪ *cd*, точки *b* и *g*, также *e* и *f*, соединя прямыми линѣя-

линѣями ef и bg будетъ $bc = cf = gc$ радіусы; чего ради $ac + cf = bc + ac = af$, и $ac - cg = ag$. Треугольникъ aef подобенъ Треугольнику abg; ибо уголъ eaf общій, уголъ $agb = aef$, потому что каждой изъ оныхъ измѣряется половиною дуги bgf (91. 96) по сему и уголъ $abg = afe$. Для подобія сихъ треугол. сдѣлай слѣдующую пропорцію, $ab : af\ (ac + bc) = ag : ae$. вычти ab изъ ae, получишь be, раздѣли be пополамъ, частное число будетъ bd; и такъ по извѣстной діогонали bc и основанію bd прямоугольнаго треугольника bdc сыщется высота cd (147), которую умножа половиною основанія ba, получишь требуемую площадь.

То есть

$140° = ac$	$140° = ac$
$70° = bc = cf$	$70° = bc = cg$
$210° = af$	$70° = ag$

$ab : af = ag : ae$

$90° : 210° = 70° : 163°,33'' = ae$

$90° = ab$

$73°,33'' = be$,

2) $73°, 33''(36°, 66'' = bd$.

$4900°,0000^{IV} = \overline{bc}^2$

$36°.66'' \times 36°,66'' = 1343°,9556^{IV} = \overline{bd}^2$

$3556°,0444^{IV} = \overline{bc}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{cd}^2$.

$\sqrt[2]{3556°,0444^{IV}} = 59°,63'' = cd$. 2)90(45 $= \frac{1}{2}ab$.

$59°,63'' \times 45° = 2683°,35'' = \frac{1}{2}ab \times cd$ = площади треугольника abc.

153. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ треугольникѣ abc, у котораго перпендикуляръ cd падаетъ внутрь основанїя ab; сумма квадратовъ изъ боковъ ab и bc, безъ квадрата бока ac, равна двумъ прямоугольникамъ изъ основанїя ab и отрѣзка bd.*

Доказ. На основанїи ab сдѣлай квадратъ bi продолжи перпендикуляръ cd пока пересѣчется съ бокомъ квадрата ih, опредѣли $be = bd$ изъ точки e проведи ef въ параллель оснoванїю ab, на gh сдѣлай квадратъ gk, будетъ прямоугольникъ $ar = rh$ (142), $\overline{bd}^2 = \overline{gh}^2$ по положенїю, по сему $ar + \overline{bd}^2 = rh + \overline{gh}^2$, то есть прямоугольникъ $ae =$ прямоугольнику rk. Итакъ для прямоугольнаго треугольника adc будетъ $\overline{ac}^2 = (\overline{ad}^2)\ fg + \overline{dc}^2$, а для треугольника dbc, $\overline{bc}^2 = (\overline{db}^2) gh + \overline{dc}^2$ (144): но $\overline{ab}^2 = fg + ae + rh$, а сложа части сихъ послѣднихъ равенствъ съ первыми будетъ $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 = fg + \overline{dc}^2 + ae + (rh + \overline{gh}^2)$ rk, изъ суммы сихъ квадратовъ вычти $\overline{ac}^2 = fg + \overline{dc}^2$ останется $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 = ae + rk = 2ae$, то есть двумъ прямоугольникамъ ae, изъ коихъ каждаго основанїе $= ab$ а высота $be = bd$. ч. д. н. ф.120

154. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc извѣстны бока ac = 100°, bc = 80°, ab = 70° сыскать высоту ad и площадь онаго.*

Рѣшен. Умножь каждой бокъ треугольника квадратно. Квадратъ бока ab сложи съ квадратомъ бока bc, изъ суммы сихъ квадратовъ вычти квадратъ бока ac, остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, сїе частное раздѣли на основанїе bc получишь bd (153). Наконецъ по извѣстнымъ bd и ab сыщи высоту ad (147), которую умножа чрезъ половину основанїя bc получишь желаемую площадь. ф.121

То

То есть

$70^\circ \times 70^\circ = 4900^\circ = \overline{ab}^2 . 100^\circ \times 100^\circ = 10000^\circ = \overline{ac}^2$

$80^\circ \times 80^\circ = 6400 = \overline{bc}^2$

$11300^\circ = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2$

$10000^\circ = \overline{ac}^2$

$1300^\circ = \overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 = 2bc \times bd.$

$2)1300(650^\circ = bc \times bd.$ $80)650(8^\circ.12'' = bd.$

$4900^\circ,0000^{IV} = \overline{ab}^2$

$8^\circ,12'' \times 8^\circ,12'' = 65^\circ,9344^{IV} = \overline{bd}^2$

$4834^\circ,0656^{IV} = \overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ad}^2$

$\sqrt{4834^\circ,0656^{IV}} = 69^\circ, 52'' = ad.$

$2)80(40^\circ = \frac{1}{2}bc$

$69^\circ,52'' \times 40^\circ = 2780^\circ,80'' = \frac{1}{2}bc \times ad =$ площади треугольника *abc*.

Доказ. Понеже $\overline{ab}^2 + \overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 = 2bc \times bd$ (153) чего ради $2\,bc \times bd : 2 = bc \times bd$, и наконецъ $bc \times bd : bc = bd$; прочее жъ доказано прежде.

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ:

Изъ точки *a* меньшимъ бокомъ *ab* опиши кругъ *bgef*, продолжи бокъ *ca* пока пересѣчется съ окружностью въ точкѣ *f*, точки *f*, *b* и *g*, *e* соедини прямыми линѣями *bf* и *ge*; будетъ $af = ab = ae$ радiусы, $ab + (ac)af, = cf$, $ac - ae = ec$. Треугольникъ *gec* подобенъ *bfc*, по тому что уголъ *c* общiй, уголъ $ceg = cbf$ из-

измѣряющїеся половиною дуги gef (91. 96), и уголъ $cge = cfb$; того ради сдѣлай посылку $bc : cf(ab + ac) = ec : gc$ (104). Изъ основанїя bc вычти cg останется bg, которую раздѣли на двѣ равныя части получишь $bd = gd$ (76). Потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ abd по извѣстнымъ ab и bd сыщется высота ad (147), которую умножа половиною основанїя bc получишь требуемую площадь.

$100^\circ = ac$ | $100^\circ = ac$
$70^\circ = ab$ | $70^\circ = ab = ae$
$170^\circ = ac + ab = cf$ | $30^\circ = ac - ae = ec$

$bc : cf = ec : cg.$ | $80^\circ,00'' = bc$
$80^\circ : 170^\circ = 30^\circ : 63^\circ,75''$ | $63^\circ,75'' = cg$
$16^\circ\ 25'' = bc - cg = bg$

$2)16,25''(8^\circ,12'' = \frac{1}{2}bg = gd = bd.$

$70^\circ \times 70^\circ = 4900^\circ,0000^{IV} = \overline{ab}^2$

$8^\circ,12'' \times 8^\circ,12'' = 65^\circ,9344^{IV} = \overline{bd}^2$

$4834^\circ,0656^{IV} = \overline{ab}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{ad}^2$

$\sqrt[2]{4834^\circ,0656^{IV}} = 69^\circ,52'' = ad$

$69^\circ,52'' \times 40^\circ = 2780^\circ,80'' = \frac{1}{2}bc \times ad =$ площади треугольника abc.

$2)80(40 = \frac{1}{2}bc$

155. ЗАДАЧА. *Въ данномъ треугольникѣ abc, начертить кругъ.*

Рѣшен. Углы a и c раздѣли на двѣ равныя части линѣями ad и cd, изъ точки ф.122

d взаимнаго ихъ сѣченія опусти на основаніе ab перпендикуляръ dh; на послѣдокъ изъ точки d радіусомъ dh опиши кругъ egh, которой даннаго треугольника abc коснется въ точкахъ e, g и h.

Доказ. Изъ точки d опусти на ac и bc перпендикуляры dg и de, проведи db, будетъ треугольникъ $adh = adg$, ибо уголъ $had = dag$, и уголъ $ahd = agd$ прямые по рѣшенію, по сему уголъ $adg = adh$, и бокъ ad обоимъ треугольникамъ общій, чего ради $dh = dg$ (31). Также докажется, что $de = dg$, слѣдовательно $dg = dh = de$ радіусы круга, коего окружность касается боковъ даннаго треугольника abc (84).

Слѣдст. I. Когда продолжится бокъ ac треугольника abc такъ, что al будетъ $= bh$. То изъ сего произойдетъ: 1е линѣя cl будетъ равна половинѣ суммы боковъ треугольника abc; ибо $eb = bh = al$, $ec = cg$, $ag = ah$ (92); посему сумма боковъ треугольника $abc = 2ag + 2cg + 2la$, а половина суммы сихъ трехъ боковъ $\frac{1}{2}(ab + bc + ac) = ag + cg + al = cl$. 2е линѣя cl будетъ равна суммѣ трехъ разностей, между половиною суммы боковъ и каждымъ бокомъ треугольника abc; потому что $al =$ разности между половиною суммы cl и бокомъ ac; также $ag =$ разности между cl и $al + gc$ или равнымъ сему количествомъ (bh) $be + ce$, то есть бокомъ bc; и наконецъ $gc =$ разности между cl и $al + ag$ или равнымъ сему количествомъ $ah + bh$, то есть бокомъ ab; слѣдовательно $cl =$ суммѣ трехъ разностей $ag + gc + al$, между каждымъ изъ трехъ боковъ треугольника abc и половиною суммы тѣхъ же боковъ.

Слѣдст.

Слѣдст. II. Изъ того явствуетъ, что треугольникъ abc раздѣленъ линѣями ad, cd и bd на три треугольника adb, adc и bdc коихъ общая высота есть радїусъ вписаннаго круга; того ради суммъ плоскостей сихъ треугольниковъ, то есть площадь треугольника abc будетъ $= \frac{1}{2} ab \times (dh)\, gd + \frac{1}{2} bc \times (ed)\, gd + \frac{1}{2} ac \times gd = \frac{1}{2} (ab + bc + ac) \times gd = cl \times gd$, то есть равна произведенїю полсуммы боковъ треугольника abc, радїусомъ вписаннаго круга умноженной. По сей причинѣ площадь всякаго треугольника abc = прямоугольнику, коего основанїе cl равно полсуммѣ боковъ треугольника а высота gd = радїусу вписаннаго круга.

156. ТЕОРЕМА. *Когда изъ половины суммы боковъ всякаго треугольника abc вычтется каждой бокъ, разности ихъ между собою и чрезъ половину суммы боковъ умножатся: то квадратной карень сего произведенїя, равенъ будетъ площади треугольника abc.*

Доказ. Должно доказать, что $\sqrt[2]{ag \times al \times gc \times cl} = gd \times cl$ = площади треугольника abc. Въ данномъ треугольникѣ опиши кругъ geh (155), изъ центра d на бока треугольника abc, опусти перпендикуляры dg, dh и de, на продолженной ca положи $al = hb$, на концѣ которой поставь перпендикуляръ lk, продолжи cd пока пересѣчется съ перпендикулярною lk въ точкѣ k, на продолженной cb положи $cp = cl$, точки k и p соедини прямою линѣею pk, при чемъ будетъ треугольникъ $kcl = ckp$, по тому что уголъ $lck = pck$, $lc = cp$ по положенїю и ck обоимъ треугольникамъ общїй бокъ; чего для будетъ $kp = lk$ и уголъ $klc = kpc$ прямые (30). потомъ положа $ln = ah$, проведи kn, ak No 5 ф. 123

и kb : но $ce + eb + bp = cg + ag + al$, изъ коихъ $ce + eb = cg + (kb)al$, того для $bp = ag = ak = ln$; также $kp = kl$ доказано, и уголъ $kln = p$ прямые, по сему треугольникъ kbp равенъ треугольнику kln (30), слѣдовательно $kb = kn$; но ab по сочиненію равна an, линѣя ak общая, того ради треугольникъ $abk = nak$ (33); по сему и уголъ $bak = nak$, въ разсужденіи жъ равныхъ треугольниковъ adg и adh (155) уголъ $adg = adh$; но уголъ $gdh + gah = lab + gah =$ двумъ прямымъ угламъ, по сему уголъ $gdh = lab$, и половина угла gdh или $adg = \frac{1}{2}$ угла $lab = lak$, также и уголъ $kla = agd$ прямые; того ради треугольникъ agd подобенъ alk и треугольникъ cgd подобенъ clk по сочиненію. И такъ изъ подобныхъ треугольниковъ agd и alk, будетъ $gd : ag = al : lk$ (104), при чемъ $gd \times lk = ag \times al$ (ариф. 222); для подобства жъ треугольниковъ gcd и clk, будетъ $gc : gd = cl : lk$, а умножа члены перваго содержанія чрезъ cl, а члены втораго содержанія чрезъ gd, будетъ $gc \times cl : gd \times cl = cl \times gd : gd \times lk$ (ариф. 235); но изъ первой пропорціи $gd \times lk = ag \times al$, по сему $gc \times cl : gd \times cl = gd \times cl : ag \times al$, при чемъ произведеніе крайнихъ $ag \times al \times gc \times cl =$ произведенію среднихъ $(gd \times cl) \times (gd \times cl) = \overline{(gd \times cl)}^2$; и наконецъ $\sqrt[2]{ag \times al \times gc \times cl} = gd \times cl$ (ариф. 197): но $gd \times cl =$ площади треугольника abc (155), слѣдовательно $\sqrt[2]{ag \times al \times gc \times cl} =$ площади треугольника abc.

157. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ $ab = 120°$, $bc = 160°$, $ac = 200°$ треугольника abc, сыскать онаго площадь, не сыскивая высоты.*

Рѣшен.

Рѣшен. Сперва сумму боковъ $ab + bc + ac$ треугольника abc раздѣли пополамъ, изъ половины оной, вычти порознь каждой бокъ, остатки сїи умножь между собою, вышедшее произведенїе помножь половиною суммы боковъ, потомъ изъ сего произведенїя извлеки корень квадрата, получишь плоскостное содержанїе треугольника abc.

Числами.

$120^\circ = ab$
$160^\circ = bc$
$200^\circ = ac$

$480^\circ = ab + bc + ac$ сумм.

$480^\circ : 2 = 240^\circ = \frac{1}{2}(ab + bc + ac) =$ полсум.

240°	240°	240°
120°	160°	200
120° раз.	80° раз.	40° разн.

$120^\circ \times 80^\circ \times 40^\circ = 384000^\circ \times 240^\circ = 92160000^\circ$

$\sqrt[2]{92160000} = 9600^\circ$ квадр. $=$ площад. $\Delta\, abc$.

Доказ. смотри § 156.

158. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольникѣ $abcd$ извѣстны площадь $= 4800^\circ$ и дїогональ $ac = bd = 100^\circ$ сыскать онаго бока ab и bc.*

Рѣшен. Площадь прямоугольника раздѣли пополамъ, получишь площадь треугольника abc (127), которую раздѣли на половину основанїя ac получишь высоту be (138): но какъ дїогональ $ac = bd$, то и $bf = af = \frac{1}{2} ac$ (128). И такъ по извѣстной bf и высотѣ be прямоугольнаго треугольника bef сыщет- ф. 124.

сыщется ef (147) которую вычтя изъ af останется ae; наконецъ по извѣстнымъ be и ae прямоугольнаго треугольника abe сыщется бокъ ab (146), а по (130) сыщется $bc = ad$.

Числами.

$2)4800(2400^{\circ} = \frac{1}{2}\, abcd = \Delta\, abc$

$2)100(50^{\circ} = \frac{1}{2} ac = af = fc = bf$

$50)2400(48^{\circ} = be$

$50^{\circ} \times 50^{\circ} = 2500^{\circ} = \overline{bf}^{2}$

$48^{\circ} \times 48^{\circ} = 2304^{\circ} = \overline{be}^{2}$

$196^{\circ} = \overline{bf}^{2} - \overline{be}^{2} = \overline{ef}^{2}$

$50^{\circ} = af$

$\sqrt[2]{196} = 14 = ef$

$36^{\circ} = af - ef = ae.$

$2304^{\circ} = \overline{be}^{2}$

$36^{\circ} \times 36^{\circ} = 1296^{\circ} = \overline{ae}^{2}$

$3600^{\circ} = \overline{be}^{2} + \overline{ae}^{2} = \overline{ab}^{2}.$

$\sqrt[2]{3600^{\circ}} = 60^{\circ} = ab.$

$60)4800(80^{\circ} = bc$

159. **ТЕОРЕМА.** *Площадь трапеціи abcd, равна произведенію полсуммы параллельныхъ линѣй bc и ad на высоту be, то есть,* $be \times \frac{1}{2}(bc + ad)$ *= площади трапеціи ac.*

Доказ. Продолжи ad до f такъ, чтобъ
ф.125 df была равна bc, будетъ уголъ $cbg = dfg$ и уголъ $bcg = gdf$ (48); по сему треугольникъ $bcg = dgf$ (31), къ коимъ придавъ четвеьосторонникъ $abgd$, будетъ трапеція

пецїя *abcd* $=$ треугольнику *abf*, котораго площадь $= \frac{1}{2}\, af \times be$ (133); но $\frac{1}{2}\, af = \frac{1}{2}\,(ad + df) = \frac{1}{2}\,(ad + bc)$; слѣдовательно $\frac{1}{2}\,(ad + bc) \times be$, то есть полсуммы параллельныхъ линѣй *ad* и *bc* умноженная высотою *be* равна площади трапецїи *abcd*.

Слѣдст. Того ради площадь трапецїи равна параллелограму коего основанїе равно полсуммѣ параллельныхъ линѣй, а высота равна высотѣ трапецїи.

160. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ* $ad = 160°$, $bc = 120°$, $ab = cd = 60°$ *трапецїи abcd, сыскать оной площадь.*

Рѣшен. Изъ точки *b* проведи линѣю *bh* параллельно *dc*, будетъ $bc = dh$, вычти (*bc*)*dh* изъ *ad* останется *ah*. въ треугольникѣ *abh* по тремъ извѣстнымъ бокамъ *ab*, *bh* и *ah* сыщи перпендикуляръ *be* (154), потомъ полсуммы параллельныхъ линѣй $bc + ad$ умножь высотою *be*, получишь желаемое.

Числами.

$2)40(20° = ae = eh$	$160° = ad$
$60° \times 60° = 3600° = \overline{ab}^{\,2}$	$120° = bc = hd$
$20° \times 20° = 400° = \overline{ae}^{\,2}$	$40° = ad - hd = ah$

$$3200° = \overline{ab}^{\,2} - \overline{ae}^{\,2} = \overline{be}^{\,2}$$

$\sqrt[2]{3200^\circ} = 56^\circ, 56'' = be. 2)280(140^\circ = \frac{1}{2}(bc + ad)$.
$120^\circ + 160^\circ = 280^\circ = bc + ad$. $140^\circ \times 56^\circ, 56'' =$
$7918^\circ, 40'' = \frac{1}{2}(bc + ad) \times be =$ площ. трапеціи *abcd*.

Доказ. Справедливость сего видна изъ (159).

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, когда въ трапеціи будетъ извѣстна площадь и параллельныя линѣи *bc* и *ad*, то высота *be* оной сыщется, ежели площадь раздѣлится на половину суммы параллельныхъ линѣй *bc* и *ad*.

161. ЗАДАЧА. ***По извѣстнымъ, площади трапеціи abcd 7919°, 80'', высотѣ be = 56°, 56'' и содержанію параллельныхъ линѣй bc : ad = 3 : 4 сыскать параллельныя bc и ad.***

Рѣшен. Площадь трапеціи *abcd* раздѣлян на половину высоты *be*, получишь сумму параллельныхъ линѣй *bc* и *ad*; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцію $(3 + 4) 7 : 3$, какъ сумма параллельныхъ линѣй $bc + ad : bc$ (ариф. 228); наконецъ изъ суммы параллельныхъ линѣй вычти *bc*, остатокъ будетъ $= ad$, то есть

$2)56^\circ, 56''(28^\circ, 28'' = \frac{1}{2}be$,
$28^\circ, 28'')7919^\circ, 8000^{IV}(280^\circ = bc + ad$.
$3 : 4 = bc : ad$

$(3+4)7 : 3 = 280^\circ : 120^\circ = bc$,
$280^\circ - 120^\circ = 160^\circ = ad$

162.

162. ЗАДАЧА. *Даны въ четверосторонникѣ* $abcd$ *бока* $ab = 96^\circ$, $bc = 100^\circ$, $cd = 130^\circ$, $ad = 156^\circ$ *и дїогональ* $ca = 142^\circ$ *сыскать площадь онаго.*

Рѣшен. По извѣстнымъ бокамъ сыщи въ треугольникѣ abc, равнымъ образомъ и въ треугольникѣ acd площадь (157), сложа оныя вмѣстѣ получишь требуемую площадь четверосторонника, то есть ф. 126.

сыскан. по (157) площ. $\Delta\, abc = 4794^\circ$

площ. $\Delta\, acd = 8664^\circ$

$13458^\circ =$ площади четвероугольника $abcd$.

163. ЗАДАЧА. *Извѣстны площадь четверосторонника* $abcd = 13458^\circ$, *дїогональ* $ac = 142^\circ$ *и содержанїе перпендикуляровъ* $be : df = 5 : 9$, *сыскать оные.*

Рѣшен. Раздѣля площадь четверосторонника $abcd$ на половину дїогонали ac, частное будетъ равно суммѣ двухъ перпендикуляровъ be и df; потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю, какъ сумма содержанїя $5 + 9 = 14 : 5$ такъ сысканная сумма перпендикуляровъ $be + df$ будетъ содержаться къ меньшему be; наконецъ изъ суммы перпендикуляровъ вычтя be получишь df, то есть

2)142(71° = $\frac{1}{2}ac$. 71)13458(189°,54″ = $be + df$.
67°,69″ = be
5 : 9 = $be : df$. 121°,85″ = df.
(5 + 9)14 : 5 = 189°,54″ : 67°,69″ = be.

Доказ. Понеже $df \times \frac{1}{2}ac + be \times \frac{1}{2}ac = (df + be) \times \frac{1}{2}ac$ = площади четверосторонника $abcd$, изъ чего явствуетъ, что площадь онаго $(df + be) \times \frac{1}{2}ac$ раздѣленная на $\frac{1}{2}ac = df + be$; но $be : df$ = 5 : 9, по сему 5 + 9 = 14 : 5 = $df + be : be$.

164. ТЕОРЕМА. *Площади подобныхъ треугольниковъ abc и edh содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ ac и dh.*

No3. ф. 90 *Доказ.* Изъ верьховъ b и e опусти на основанiя ac и dh перпендикуляры bp и eo, будетъ $bp : eo = ac : dh$ (104), а умножа предъидущiе члены чрезъ ac, а последующiе чрезъ dh, будетъ $bp \times ac : eo \times dh = (ac \times ac)\overset{-2}{ac} : (dh \times dh)\overset{-2}{dh}$ (ариф. 235); а по раздѣленiи членовъ перваго содержанiя на двѣ равныя части, будетъ $\frac{bp \times ac}{2} : \frac{eo \times dh}{2} = \overset{-2}{ac} : \overset{-2}{dh}$, то есть площадь треугольника abc къ площади треугольника edh, какъ квадратъ бока ac къ квадрату бока dh.

165. ЗАДАЧА. *Въ подобныхъ треугольникахъ abc площадь = 2700°, а въ тре-*

треугольникѣ ade бока ad = 80°, ae = 100°, de = 120° извѣстны; сыскать бока ab, ac и bc треугольника abc.

Рѣшен. Сперва по извѣстнымъ тремъ бокамъ треугольника ade сыщи площадь No 4
онаго (157); потомъ сдѣлай слѣдующую ф. 98
пропорцїю: какъ площадь треугольника ade къ площади треугольника abc, такъ квадратная площадь бока de, къ площади квадрата бока bc (164); а по извлеченїи квадратнаго корня получишь бокъ bc; потомъ будетъ de : bc = ae : ac, и наконецъ de : bc = ad : ab (104), то есть

сысканная по (157) плщад. △ ade = 3968

$\triangle\, ade : \triangle\, abc = \overline{de}^2 : \overline{bc}^2$

$3968^\circ : 2700^\circ = 14400^\circ : 9798^\circ = \overline{bc}^2$

$\sqrt[2]{9798^\circ} = 99^\circ = bc$

$de : bc = ae : ac$

$120^\circ : 99^\circ = 100^\circ : 82\tfrac{1}{2} = ac.$

$de : bc = ad : ab$

$120^\circ : 99^\circ = 80^\circ : 66 = ab$

Предъувѣдомленїе. Въ послѣдующихъ задачахъ рѣшенїй числами кромѣ литеральнаго, выводить я болѣе не намѣренъ; ибо опредѣля произвольною величиною извѣстныя части фигуръ, легко можно руководствомъ каждаго предложеннаго рѣшенїя, сыскивать числами неизвѣстныя части; какъ то довольно видно изъ рѣшенїй предъидущихъ задачь.

166. ТЕОРЕМА. *Въ треугольникахъ abc и def, когда уголъ a = углу d, то площади оныхъ треугольниковъ abc и def, содержатся какъ прямоугольники сдѣланные изъ боковъ ab, ac, и de, df составляющихъ равные углы.*

No 5 *Доказ.* Изъ верховъ *c* и *f* на основанiи
ф.127 *ab* и *de* опусти перпендикуляры *cp*, *fq*. Треугольники *acp* и *fdq* будутъ подобны; ибо уголъ $a = d$ и $apc = dqf$ прямые, по сему уголъ $pca = dfq$ (53); чего ради $cp : fq = ac : df$ (104), а умножа предъидущiе члены чрезъ *ab*, а послѣдующiе чрезъ *de*, будетъ $cp \times ab : de \times fq = ac \times ab : df \times de$ (ариф. 235); наконецъ по раздѣленiи членовъ перваго содержанiя на 2 будетъ $\frac{1}{2}cp \times ab : \frac{1}{2}fq \times de = ac \times ab : df \times de$, то есть площадь треугольника *abc* къ площади треугольника *def* какъ произведенiе боковъ *ac* и *ab* къ произведенiю боковъ *df* и *de*.

167. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ параллелограмѣ abdc сумма квадратовъ всѣхъ боковъ, равна суммѣ квадратовъ дiогоналей*

Доказ. Проведи изъ верьха угла *a* на *cd*
ф.128 перпендикулярную линѣю *af*, а изъ точки *c* на продолженную *ba*, перпендикулярную *ce*, будетъ $ec = af$, $cf = ae$ (50). И такъ въ разсужденiи тупоугольнаго

треуголь-

треугольника abc будетъ $\overline{bc}^2 - \overline{ab}^2 - \overline{ac}^2 = 2ab \times ae$ (151); а въ разсужденіи треугольника adc, $\overline{ac}^2 + (\overline{cd}^2)\,\overline{ab}^2 - \overline{ad}^2 = 2(cd)ab \times (cf)ae$ (153), по сему $\overline{bc}^2 - \overline{ac}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{ab}^2 - \overline{ad}^2$, придай къ симъ частямъ $\overline{ac}^2 + \overline{ab}^2 + \overline{ad}^2$, будетъ $\overline{bc}^2 + \overline{ad}^2 = 2\overline{ac}^2 + 2\overline{ab}^2 = \overline{ac} + (\overline{ac}^2)\,\overline{db}^2 + (\overline{ab}^2)\,\overline{cd}^2$.

168. ЗАДАЧА. *Въ параллеграмѣ $abcd$ извѣстны бока ab, bc и діогональ db сыскать діогональ ac.*

Рѣшен. Умножь каждой бокъ параллеграма $abcd$ квадратно, сложа оные вмѣстѣ, вычти изъ сей суммы квадратъ діогонали db, остатокъ будетъ равенъ квадрату діогонали ac; на конецъ коренъ сего квадрата будетъ равенъ требуемой діогонали ac, то есть $\overline{ab}^2 + \overline{dc}^2 + \overline{ad}^2 + \overline{bc}^2 = 2\overline{ab}^2 + 2\overline{ad}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{db}^2$, и $\overline{ac}^2 + \overline{db}^2 - \overline{db}^2 = \overline{ac}^2$ (167), $\sqrt{\overline{ac}^2} = ac$. No 4 ф. 105

Другимъ образомъ.

Въ треугольникѣ abd сыщи перпендикуляръ af (154). По извѣстной af и ad треугольника adf сыщи df (147). Раздѣли db на двѣ равныя части, частное будетъ $= de$ изъ которой вычтя df получишь ef, потомъ въ треуголлникѣ aef, по

по извѣстной af и ef, сыщи ae (146). Но $ae = ec$ (128), посему $ae \times 2 = ac$.

169. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади прямоугольника $abcd$ и содержанїю бока ab къ $ad = 3 : 4$ сыскать бока ab и ad.*

No 5. ф. 129. *Рѣшен.* Понеже содержанїе $3 : 4$ значитъ, что бокъ ab содержитъ въ себѣ три такихъ частей каковыхъ въ бокѣ ad есть четыре, чего ради 3 умноженное чрезъ $4 = 12$ ти равнымъ квадратамъ составляющимъ площадь прямоугольника $abcd$. И такъ когда площадь прямоугольника $abcd$ раздѣлишь на число сихъ квадратовъ, то есть на 12 частей, частное число будетъ равно площади одного квадрата $aegf = \overline{ae}^2$, квадратной корень площади сего квадрата будетъ $=$ боку $af = ae$, наконецъ $af \times 4 = ad$, $ae \times 3 = ab$.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, когда дана будетъ площадь прямоугольнаго треугольника abd и содержанїе перпендикуляровъ ab и ad, то слѣдуетъ площадь онаго удвоить, произведенїе будетъ равно площади прямоугольника $abcd$; а потомъ по рѣшенїю предъидущей задачи найдется высота ab и основанїе ad, и напослѣдокъ $\overline{ab}^2 + \overline{ad}^2 = \overline{bd}^2$, $\sqrt{\overline{bd}^2} = bd$.

170. ЗАДАЧА. *По извѣстной дїогонали bc и содержанїю перпендикуляровъ $ab : ac = 4 : 5$ прямоугольнаго треугольника abc, найти оные перпендикуляры.*

ф. 130 *Рѣшен.* Понеже $\overline{bc}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$: перпендикуляръ же ab содержитъ въ себѣ 4 такихъ частей каковыхъ въ ac есть пять. И такъ умножа части перпендикуляра ab и части основанїя ac квадратно, то

то есть, $4 \times 4 = 16 = \overline{ab}^2$ и $5 \times 5 = 25 = \overline{ac}^2$, сложи оные вмѣстѣ, получишь число квадратовъ $=$ $16 + 25 = 41$ составляющихъ плоскость квадрата діогонали bc; сего ради умножь bc квадратно, получишь сумму площадей $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2$, которую раздѣля на число квадратовъ составляющихъ вобще ихъ плоскость, то есть на 41, частное число будетъ равно одному квадрату $aklm = \overline{am}^2$, изъ площади сего квадрата извлеки корень, получишь бокъ am $= ak = an$, наконецъ $ak \times 5 = ac$ и $an \times 4 = ab$.

О ПРОПОРЦІОНАЛЬНЫХЪ ЛИНѢЯХЪ ОТНОСЯЩИХСЯ КЪ КРУГУ.

171. *Опредѣленіе.* Въ кругѣ линѣй gn, pq и проч. стоящія на діаметрѣ ef перпендикулярно называются *полупоперешники* круга; а части en, nf и ep, pf діаметра ef *отрѣзки.* Ф.131

172. ТЕОРЕМА. *Квадратъ всякаго полупоперешника на примѣръ gn, равенъ прямоугольнику изъ отрѣзковъ en и nf.*

Доказ. Изъ точки g проведи линѣи ge и gf, будетъ треугольникъ egf прямоугольной (91), и перпендикулярною gn раздѣленъ на два другіе прямоугольные треугольника egn и gnf, кои между собою подобны (122); чего ради $en : ng = ng : nf$, при чемъ $en \times nf = \overline{gn}^2$, то есть,

пло-

площадь прямоугольника изъ отрѣзковъ *en* и *nf* = площади квадрата изъ полупоперешника *gn*. (133).

Слѣдст. I. Изъ сего явствуетъ, что всякая линѣя, проведенная изъ какой нибудь точки взятой на окружности круга перпендикулярно къ дїаметру *ef*, есть средняя пропорцїональная линѣя между отрѣзками онаго, и квадратъ всякаго полупоперешника равенъ параллелограму изъ отрѣзковъ, какъ $\overline{gn}^2 = en \times nf$, и $\overline{pq}^2 = ep \times pf$ и проч.

Слѣдст. II. Всякая хорда есть средняя пропорцїональиая линѣя между дїаметромъ *ef* и частїю онаго находящеюся между концемъ хорды, и опущеннымъ изъ другаго ея конца перпендикуляромъ *gn*. Ибо прямоугольной треугольникъ *egn* подобенъ *egf* (122); чего ради $en : eg = eg : ef$; слѣдовательно *eg* есть средняя пропорцїональная линѣя между *en* и *ef*, при чемъ $en \times ef = \overline{eg}^2$; также и хорда *fg* есть средняя пропорцїональная линѣя, между дїаметромъ *ef* и отрѣзкомъ *nf*, и $ef \times nf = \overline{fg}^2$.

173. ЗАДАЧА. *Между двухъ данныхъ линѣй ab и cd сыскать среднюю геометричекую.*

Рѣшен.

Рѣшен. Данныя прямыя линѣи ab и cd. ф. соединя въ одну прямую линѣю ef, на 132
составленной изъ оныхъ линѣе enf опиши полкруга, потомъ изъ соединенїя точки n поставь перпендикулярную ng (40), которая будетъ требуемая средняя пропорцїональная линѣя (172).

174. ЗАДАЧА. *Въ полкругѣ egf извѣстны части en и nf дїаметра ef, сыскать полуполерешникъ gn и хорды eg и gf.*

Рѣшен. Понеже треугольникъ egf прямоугольной и притомъ $ne \times nf = \overline{gn}^2$ ф. 131
(172), по сему умножа en на nf, произведенїе будетъ равно площади квадрата полупоперешника gn, изъ котораго квадратной корень будетъ $= gn$. Потомъ по извѣстнымъ en и gn прямоугольнаго треугольника eng сыщется eg. Такимъ же образомъ сыщется и gf.

Слѣдст. Ежели будетъ извѣстна часть en и хорда eg, то прочее сыщется слѣдующимъ образомъ; $en : eg = eg : ef$, $ef - en = nf$. Потомъ $nf : gf = gf : ef$ (172), причемъ будетъ $nf \times ef = \overline{gf}^2$, то есть площадь прямоугольника изъ ef и nf, равна квадрату изъ хорды gf, котораго квадратной корень будетъ $= gf$.

175. ЗАДАЧА. *Въ полкругѣ egf, извѣстны полупоперешникъ gn, и дïаметръ ef, сыскать части en и nf.*

Рѣшен. Дïаметръ ef раздѣли пополамъ
ф.132 въ точкѣ k, изъ центра k проведи линѣю kg, которая будетъ $= kf$; потомъ въ прямоугольномъ треугольникѣ gnk по извѣстнымъ gn и kg сыщется nk. Наконецъ $nk + kf = nf$, $ke - nk = en$.

176. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольникѣ abcd, извѣстны площадь и сумма боковъ ab + bc, сыскать оные бока порознь.*

Рѣшен. На продолженной bc опредѣли $bf = ab$,
ф.133 потомъ раздѣля fc на двѣ равныя части въ точкѣ g, радïусомъ gf опиши полкруга, продолжи ab до e, будетъ $bc \times (ab)\, fb = \overline{be}^2$, то есть площадь прямоугольника ac равна площади квадрата изъ полупоперешника be (172), коего квадратной корень $= be$; наконецъ по извѣстному радïусу $eg = \frac{1}{2} cf$ и полупоперешнику be, сыщется bg (147), и $bg + (eg)\, gc = bc$, $fg - bg = bf = ab$.

Слѣдст. Такимъ же образомъ по извѣстнымъ, площади, и суммѣ боковъ $ab + ad$ прямоугольнаго треугольника abd сыщутся онаго бока, когда площадь его умножится чрезъ 2, то произведенïе будетъ равно площади прямоугольника ca; а потомъ по предъидущей задачѣ опредѣлятся бока ab и $bc = ad$, а по (146) найдется дïогональ bd.

177. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc, извѣстны дïогональ bc и сумма перпендикуляровъ ab + ac, сыскать оные порознь.*

Рѣшен.

Рѣшен. На продолженной ac опредѣли $ae = ab$, будетъ $ec = ac + (ae)\, ab$, сдѣлай на bc и ec квадраты bd и eg, продолжи ab до i, проведи дïогональ eg которая съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ f, чрезъ которую проведи nfm параллельно къ ec, при чемъ na и im будутъ квадраты; ибо уголъ $aef = 45$ град. $= efa$ (53) $= ifg$ (20) $= igf$, посему $ae = af$, также $if = ig = fm = ac$. И такъ умножь $(ab + ac)\, ec$ квадратно, получишь площадь квадрата $ekgc = (ea)\, \overline{ab}^2 + (fm)\, \overline{ac}^2 + am + (kf)\, am$; потомъ умножь bc квадратно будетъ $\overline{bc}^2$ равенъ суммѣ площадей квадратовъ $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{ea}^2 + \overline{fm}^2$. Сумму сихъ квадратовъ вычтя изъ $\overline{ec}^2$ остатокъ будетъ $= am + (kf)\, am = 2am$, которое раздѣля пополамъ, получишь площадь прямоугольника am, коего сумма боковъ $af\ (ab) + ac$ извѣстна, а напослѣдокъ по прошедшей задачѣ найдутся порознь бока ac и $af = ab$. ф. 134

178. ЗАДАЧА. *Площади двухъ квадратовъ $ak + bl$ вообще и сумма боковъ $ab + bc$ извѣстны; сыскать каждой бокъ ab и bc порознь.*

Рѣшен. На линѣе ac сдѣлай квадратъ $acdf$. Проведи дïогональ cf, продолжи kb до e, потомъ опредѣли $cg = bc$, изъ точки g проведи gn параллельно ac, которая пересѣчетъ дïогональ fc въ точкѣ q, причемъ будетъ квадратъ $bg = bl$ и квадратъ $ne = ak$. И такъ умножа ac квадратно, будетъ $\overline{ac}^2 = acdf = bg + ne + nb + qd$, изъ сей площади вычти сумму площадей $(ak)\, ne + (bl)\, bg$ остатокъ будетъ $nb + qd$; но $qd = nb$ (142), посему $nb + qd = 2nb$. Сумму сихъ прямоугольниковъ раздѣля пополамъ, получишь площадь прямоугольника ф.135

abqn, коего сумма боковъ $ab + (bc) bq$ извѣстна; по сей причинѣ бока *ab* и $bq = bc$ по § 176 сыщутся.

179. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ, площади прямоугольника abcd и разности боковъ ad — ab = fd сыскать бока ab и ad.*

Рѣшен. Продолжи *ad* до *n*, потомъ раздѣля
ф. *fd* пополамъ, изъ точки *e* радіусомъ *ae* опиши
136 полкруга *amn*, продолжи *cd* до *m*, потомъ извлеки корень квадрата изъ площади даннаго прямоугольника *abcd*, получишь *dm* (172). По извѣстной *de* и *dm* сыщи *em* (146) $= ea$; изъ которой вычтя $ef = \frac{1}{2} df$, остатокъ будетъ $= af = ab$, также $ae + ed = ad$.

Доказ. Понеже $\overline{dm}^2 = ad \times (dn) dc = adcb$ (172), и $\sqrt{\overline{dm}^2} = dm$, также $\overline{dm}^2 + \overline{ed}^2 = \overline{em}^2$ (146), $\sqrt{\overline{em}^2} = em = ea$ и проч.

180. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ бокамъ ab, ac и bc треугольника abc; сыскать радіусъ bd описаннаго круга.*

Рѣшен. Изъ точки *b* опусти перпендикуляръ
ф. *be*, пролжи радіусъ *bd* до *f*, точки *c* и *f*
137 соедини прямою линѣею *cf*. По извѣстнымъ бокамъ *ab*, *bc* и *ac* треугольника *abc*, сыщи перпендикуляръ *be*; но какъ треугольникъ *aeb* подобенъ *bfc*, ибо уголъ $a = f$ (91), уголъ $aeb = bcf$ прямые и уголъ $abe = fbc$; чего ради будетъ $be : bc = ab :$ къ діаметру *bf*, и $\frac{1}{2} bf$ равна требуемому радіусу $bd = df$.

181. ТЕОРЕМА. *Когда три линѣи en, eg и ef въ непрерывной геометрической про-*

пропорцїи, то квадратъ первой линѣи содержится къ квадрату второй линѣи, какъ первая къ третїй; то есть $en^2 : eg^2 = en : ef$.

Доказ. Понеже $eg^2 = en \times ef$ (172); чего ради будетъ $en^2 : eg^2$ или $en \times ef = en : ef$, и пропорцїя справедлива потому, что произведенїе крайнихъ $en^2 \times ef$, равно произведенїю среднихъ $en \times en \times ef$ или $en^2 \times ef$ (ариф. 225). ф. 131

Слѣдст. Ежели дїаметръ ef раздѣлится на нѣсколько равныхъ частей на примѣръ на 5 и изъ одной пятой части какъ en дїаметра ef поставя перпендикуляръ ng проведется хорда eg: то квадратъ сей линѣи eg будетъ во столько разъ больше квадрата части дїаметра en, во сколько частей дїаметръ раздѣленъ. Ибо $en : eg = eg : ef$ или $5en$ (172), причемъ будетъ $eg^2 = 5en^2$ (ариф. 222): но $en^2 : (5\,en^2)\ eg^2 = 1 : 5$; слѣдовательно eg^2 въ пять разъ больше en^2.

182. ТЕОРЕМА. *Когда въ кругѣ abcd двѣ хорды ab и dc взаимно пересѣкутся, то прямоугольникъ изъ частей ae и eb одной, будетъ равенъ прямоугольнику изъ частей ce и ed другой* хорды.

Доказ. Точки a и d, также b и c
ф. 138 соединя прямыми линѣями ad и bc будутъ треугольники ade и bec подобны между собою; ибо уголъ $dae = ecb$, уголъ $ade =$ углу ebc (91), также и уголъ $dea = bec$ (20); чего ради $ae : ec = de : eb$ (104), и потому $eb \times ae = de \times ec$ (ариф. 222), то есть прямоугольникъ изъ линѣй eb и ae, равенъ прямоугольнику, имѣющему основанїе de, а высоту ec (133).

Слѣдст. Ежели будутъ извѣстны части ce и de хорды de, и часть ae хорды ab; то другая часть eb сыщется. Поелику $ae \times eb = de \times ce$ (182); того ради умножь часть de на ce, сїе произведенїе раздѣля на часть ae получишь eb.

183. ТЕОРЕМА. *Когда изъ точки c лежащей внѣ круга, проведутся два секанса ac и bc, то прямоугольникъ изъ наружной части cd и всего секанса ac, равенъ прямоугольнику изъ наружной части ce и всего секанса bc.*

Доказ. Точки a и b также d и e соединя
ф. 139 прямыми линѣями ab и de, треугольники dec и abc будутъ подобны между собою; потому что уголъ $dec = cab$ измѣряющїеся половиною дуги deb (91. 96), уголъ c общїй, по сему и уголъ $edc =$ углу abc; чего ради $dc : bc = ce : ac$ (104),

и

и $ac \times dc = bc \times ce$ (ариф. 222); то есть площадь прямоугольника котораго основаніе секансъ ac а высота dc, равна площади прямоугольника изъ линѣй bc и ce (133).

184. ЗАДАЧА. *Извѣстны части ab и be секанса ae, и часть cd другаго секанса ad; сыскать часть ac.*

Рѣшен. Часть ab сложи съ be, сумму ихъ $ab + be = ae$ умножь чрезъ ab, произведеніе $ae \times ab$ будетъ $= ac \times ad =$ площади прямоугольника df коего основаніе ad а высота $af = ac$ (183); въ которомъ по извѣстной разности боковъ $ad - (ac)af = dc$, и площади прямоугольника df сыщется ad и $af = ac$ (179). ф. 140

185. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки c, лежащей внѣ круга, проведутся касательная cf и секансъ ac, то квадратъ касательной cf, будетъ равенъ прямоугольнику изъ цѣлаго секанса ac и наружной его части cd.*

Доказ. Изъ касательной точки f къ точкамъ a и d проведи хорды af и fd. Треугольники acf и dcf будутъ подобны между собою: ибо уголъ $caf = dfc$, потому что каждой изъ нихъ мѣряется половиною дуги def (91. 93), уголъ c обоимъ треугольникамъ общій, по сему и уголъ $afc = fdc$. И такъ въ разсужденіи ф. 139

подобства треугольникъ будетъ $dc : cf = cf : ac$ (104); по сей причинѣ $\overline{cf}^2 = de \times ac$ (ариф. 222), то есть площадь квадрата изъ линѣи cf равна площади прямоугольника, котораго основанїе ac а высота cd (133).

Слѣдст. Изъ чего видно, что касательная cf есть средняя пропорціональная между наружною частїю cd и цѣлымъ секансомъ ac.

186. ЗАДАЧА. *Извѣстны части bc и cd секанса bd; сыскать касательную ab.*

Рѣшен. Понеже $bc \times bd = \overline{ab}^2$ (185),
ф. 141 чего ради сложи bc съ cd коихъ сумма будетъ $= bd$; потомъ умножь bc чрезъ bc, произведенїе $bd \times bc$ будетъ равно квадрату изъ линѣй ab. Изъ площади сего квадрата извлеки квадратной радиксъ, который будетъ $= ab$.

Слѣдст. I. Когда даны будутъ касательная ab и секансъ bd, то сыщется bc, есть ли квадратъ изъ касательной ab раздѣлится на db, получишь bc.

Слѣдст. II. Ежели даны будутъ касательная ab и внутренняя часть секанса cd, то сыщется наружная онаго часть bc; ибо умножа ab квадратно, получишь площадь прямоугольника bf (185), коего разность боковъ $db - (bc)\ be = dc$ извѣстна, сыщется $be = bc$ (179).

187. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc, извѣстны перпендикуляръ bc и разность bd дїогонали ab и основанїя ac; сыскать ac и ab.*

Рѣшен. Изъ точки *a* радїусомъ *ac* опиши кругъ *cde*, продолжи *ba* до *e*, линѣя *bc* будетъ касательная (84): того ради умножь перпендикуляръ *bc* квадратно, площадь сего квадрата раздѣли на разность *bd* получишь секансъ *be* (185); изъ коего вычти *bd*, останется дїаметру *de*, которой раздѣля на двѣ равныя части, частное будетъ $= ad = ac$, и $ad + bd = ab$. ф. 142

Доказ. Понеже $\overline{bc}^2 = db \times be$ (185), слѣдовательно $\frac{db \times be}{db} = be$ (136).

188. ЗАДАЧА. *Въ прямоугольномъ треугольникѣ abc, изеѣстны высота bc, и сумма дїогонали ab вообще съ основанїемъ ac, то есть $ac + ab$; сыскать оныя порознь.*

Рѣшен. Изъ точки *a*, радїусомъ *ac* опиши кругъ *ced*. Продолжи *ba* до *e*, будетъ $ac = ae$, и $ab + ac = ab + ae = be$ линѣя *bc* будетъ касательная (84), того ради умножь *bc* квадратно, площадь сего квадрата раздѣли на сумму боковъ $ab + ac = be$, частное будетъ $= db$, вычти оную изъ *be* останется дїаметру *ed*, $\frac{1}{2}de = ad = ac$, и $ad + db = ab$.

 Доказ.

Доказ. Понеже $\overline{bc}^{2} = db \times be$ (185), слѣдовательно $\frac{db \times be}{be} = db$ (136).

189. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc, извѣстны части db и dc основанїя bc, и два бока вообще ab + ac; сыскать оныe порознь.*

No 4 ф.121 *Рѣшен. и доказ.* Изъ точки a меньшимъ бокомъ ab опиши кругъ $bfeg$, продолжи ca до f, точки e и g, b и f соедини прямыми линѣями eg и bf, при чемъ будетъ $ab = af$, $cf = ac + ab$, также $bd = dg$ (76); по сему $cd - gd = gc$. Треугольникъ bcf подобенъ cge потому, что уголъ c общїй, и уголъ $f = cge$ измѣряющїеся половиною дуги egb (91. 96), и уголъ $cbf = ceg$, и для подобїя оныхъ будетъ $cf : cg = bc : ec$ (104); вычти ec изъ cf, остатокъ будетъ равенъ дїаметру $ef = ea + ab = 2ab$, и $2ab : 2 = ab = ae$. также $ce + ae = ac$.

No 5 ф143 190. ТЕОРЕМА. *Когда на концѣ дїаметра af, поставится перпендикуляръ cf, и протянется отъ другаго конца a дїаметра секансъ ac, то квадратъ дїаметра af будетъ равенъ прямоугольнику изъ секанса ac и хорды ad.*

Доказ. Изъ точки f въ точку d гдѣ окружность круга съ проведенною ac взаимно пересѣклась проведи

проведи линѣю df, будутъ треугольники adf и afc между собою подобны; ибо уголъ a общїй, уголъ adf заключающїйся въ полкругѣ прямой, равенъ прямому углу afc; посему и уголъ $afd = acf$; чего ради $ad : af = af : ac$ (104), слѣдовательно $ad \times ac = \overline{af}^2$, то есть прямоугольникъ изъ линѣй ad и ac равенъ квадрату изъ линѣи af (133).

191. ТЕОРЕМА. *Ежели изъ точки a взятой на окружности круга проведутся двѣ хорды ab и ac и третья fd ихъ пересѣчетъ такъ, что дуга $af = ad$; то прямоугольникъ изъ отрѣзка ag и цѣлой хорды ab, будетъ равенъ прямоугольнику изъ отрезка ae и цѣлой хорды ac; и каждой изъ сихъ прямоугольникъ равенъ квадрату изъ хорды af.*

Доказ. 1е Точки b и c соединя прямою линѣею bc будутъ треугольники age и abc подобны между собою; ибо уголъ bac общїй, уголъ c = углу age, потому что мѣра угла $c = \frac{1}{2}$ дуги $bf + \frac{1}{2}af$ или $\frac{1}{2}ad$ (91), а мѣра угла $age = \frac{1}{2}$ дуги $bf + \frac{1}{2}ad$ или $\frac{1}{2}af$ (97), посему и уголъ abc = углу gea; и для подобства треугольниковъ age и abc, будетъ $ag : ac = ae : ab$ (104); слѣдовательно $ab \times ag = ac \times ae$ (ариф. 222), то есть прямоугольникъ изъ линѣй ab и ag = прямоугольнику изъ линѣй ac и ae (133). ф. 144

2е. Точки b и f соединя прямою линѣею bf треугольники afg и afb будутъ подобны; ибо уголъ fab общїй; уголъ $afd = abf$, потому что дуга $af = ad$ (91), посему и уголъ $agf = afb$; и такъ въ разсужденїи подобства треугольниковъ будетъ $ag : af = af : ab$ (104); причемъ $ab \times ag = \overline{af}^2 = ac \times ae$. ч. н. д.

192. ЗАДАЧА. *Въ кругѣ $afbcd$ проведены изъ точки a двѣ хорды ab и ac и третья fd ихъ пересѣкаетъ такъ, что дуга $af =$ дугѣ ad; извѣстны части ag и bg хорды ab, и часть ec хорды ac, сыскать хорду af и часть ae хорды ac.*

ф. 144 *Рѣшен.* и *Доказ.* Понеже по предъидущей теоремѣ прямоугольникъ изъ линѣй ab и ag, равенъ квадрату изъ хорды af, и прямоугольнику изъ линѣй ae и ac: чего ради умножь ab чрезъ ag получишь площадь квадрата изъ линѣи af, также и площадь прямоугольника изъ линѣй ae и ac; изъ площади квадрата хорды af, извлеки квадратной корень получишь хорду af. Напослѣдокъ по извѣстной площади прямоугольника изъ линѣй ac и ae и разности се боковъ $ac - ae$ сего прямоугольника сыщется ae (179).

193. ТЕОРЕМА. *Прямоугольникъ изъ дїогоналей ac и db всякого четвероугольника $abcd$ вписаннаго въ кругѣ, равенъ суммѣ прямоугольниковъ изъ противолежащихъ боковъ, то есть $ab \times cd + bc \times ad = ac \times db$.*

No 3 ф. 87 *Доказ.* Положимъ что уголъ abd меньше угла dbc. И такъ сдѣлавъ уголъ $fbc = abd$, треугольники abd и bfc будутъ подобны; ибо уголъ $bca = bda$ (91), уголъ $fbc = abd$ по положенїю, по сему и уголъ $bfc =$ углу bad; чего ради $ad : fc = bd : bc$ (104), при чемъ $bc \times ad = fc \times bd$ (ариф. 222). равнымъ образомъ и треуголаникъ abf, подобенъ bdc; ибо уголъ $baf = bdc$ (91); а придавъ уголъ ebf къ углу abd и къ другому ему равному fbc, будетъ уголъ $abf = dbc$, по сему и уголъ $afb = bcd$.

И

И такъ для подобства оныхъ треугольниковъ будетъ $ab : bd = af : dc$ (104); при чемъ $ab \times dc = bd \times af$, придай сіи произведенія къ первымъ будетъ $bc \times ad + ab \times dc = bd \times fc + bd \times af = (fc + af) ac \times bd = ac \times bd$; слѣдовательно $bc \times ad + ab \times dc = ac \times bd$, то есть прямоугольникъ изъ боковъ bc и ad съ прямоугольникомъ изъ боковъ dc и ab равны прямоугольнику изъ діогоналей ac и bd (133).

194. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc извѣстны площадь, основаніе ab, и сумма двухъ боковъ $ac + bc$, найтить оные порознь.*

Рѣшен. Въ треугольникѣ acb опиши кругъ egh, No 4 ф.122
продолжи ca такъ, чтобы al равна была bh, при чемъ будетъ cl равна полсуммѣ боковъ $ac + cb + ab$, также $ag = ah$ (155), по сему $ab = lg$, которую вычти изъ полсуммы боковъ cl треугольника abc, останется $gc = ce$. Площадь треугольника acb раздѣли на полсуммы боковъ, то есть на cl частное будетъ $=$ радіусу $gd = de$ (155). Въ прямоугольномъ треугольникѣ cgd сыщи діогональ cd и перпендикуляръ gr, а по извѣстной gr и gc прямоугольнаго треугольника gcr сыскавши высоту cr, умножь оную на $\frac{1}{2}ge = gr$; произведеніе будетъ равно площади треугольника gec, которой съ треугольникомъ acb имѣетъ общій уголъ c; и для того площадь треугольника gec содержится къ площади треугольника acb, какъ прямоугольникъ изъ gc и ce или $\overline{gc}^2$ къ площади прямоугольника изъ боковъ ac и bc (166); а напослѣдокъ по извѣстной площади сего прямоугольника, и суммѣ боковъ $ac + bc$ сыщутся оные порознь (176).

195. *Опредѣлен.* Ежели какая нибудь линѣя, раздѣлится на двѣ части такъ, что одна частъ

будетъ

будетъ средняя пропорціональная между другою частію и цѣлою линеею, тогда говорится что оная линея раздѣлена по наружной посредственной пропрціи.

196. ЗАДАЧА. *Данную линѣю ab раздѣлить по наружной посредственной пропорціи.*

No 5 ф145 *Рѣшен.* Изъ точки b на концѣ линѣи ab поставь перпендикуляръ $bc = ab$, раздѣли ab на двѣ равныя части въ точкѣ d, точки d и c, соедини прямою линѣею dc. Изъ точки d радіусомъ dc опиши дугу cf, пока съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ f, потомъ изъ точки b радіусомъ bf опиши дугу fm; которая перпендикулярную $bc = ab$ раздѣлитъ въ точкѣ m по наружной посредственной пропорціи такъ, что будетъ $bc : bm = bm : mc$.

Доказ. Изъ точки d радіусомъ dc опиши дугу cgk пока съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ k, при чемъ будетъ $af = bk$. Ибо $df = kd$ радіусы, и $db = ad$ по рѣшенію, и такъ $(df + ad) af = (kd + db) bk$; по сему прямоугольникъ изъ линѣй bk и bf или bn равенъ прямоугольнику изъ линѣй af и bf или fe (129) $= \overline{bc}^2$ (172), отъ коихъ по отнятіи общаго прямоугольника am, останется прямоугольникъ $gm = \overline{bm}^2$, то есть $(gc)\ bc \times mc = \overline{bm}^2$; чего ради $bc : bm = bm : mc$ (ариф. 251) слѣдовательно линѣя bc равная данной ab раздѣлена въ точкѣ m по наружной посредственной пропорціи.

Другимъ образомъ.

Изъ точки b на концѣ данной линѣи ab, поставь
ф. 146 перпендикулярную $bc = \frac{1}{2}\ ab$, потомъ изъ точки c радіусомъ bc опиши кругъ bde, чрезъ точку a и центръ круга c проведи линѣю ad; на послѣдокъ

сдѣлай

сдѣлай $af = ae$; при чемъ линѣя ab въ точкѣ f раздѣлится по наружной посредственной пропорцїи такъ, что $ab : af = af : fb$.

Доказ. Понеже $ae : ab = ab : ad$ (185), также $ab - ae : ad - ab = ae : ab$ (ариф. 228); но $ab = ed$ и $af = ae$ по рѣшенїю; чего ради будетъ $ab - af : ad - ed = af : ab$, то есть $bf : (ae)\ af = af : ab$, ч. д. н.

Слѣдст. Изъ перваго доказательства видно, что $bk : bc = bc : bf$ (172); но $bk = af$ и $bc = ab$; того ради $af : ab = ab : bf$, слѣдовательно линѣя af въ точкѣ b раздѣлена по наружной посредственной пропорцїи. Тожъ самое видно изъ втораго доказательства, что $ae : (ab)\ ed = (ab)\ ed : ad$; посему и ad въ точкѣ e раздѣлена по наружной посредственной пропорцїи. ф. 145 ф. 146

О ПРАВИЛЬНЫХЪ ФИГУРАХЪ.

197. *Опредѣл. Правильныя фигуры* суть тѣ, у которыхъ всѣ бока ab, bc, cd и пр. и углы eab, abc, bcd, и проч. равны, какъ на пр. $abcde$. А въ противномъ случаѣ называются *неправильными*. ф. 147

198. *Опредѣл. Уголъ многоугольника* (полигона) есть тотъ, которой заключается боками ab и bc того жъ многоугольника, какъ уголъ abc.

199. ТЕОРЕМА. *Около всякаго правильнаго многоугольника кругъ описанъ быть можетъ.*

Доказ.

Доказ. Положимъ что фигура $abcde$ есть правильной пятiугольникъ. Уголъ abc сего многоугольника : равно иближайшiй къ нему bcd раздѣли на двѣ равныя части линѣями bf и cf, изъ точкѣ f проведи af, fe и fd; будетъ треугольникъ $afb = bfc$; ибо уголъ $abf = fbc = fcb$ по рѣшенiю, бокъ $ab = bc$, и fb общiй бокъ; по сему $af = fc$ (30) $= fb$ (33). Уголъ $fcb = fba = fab = \frac{1}{2}bae$; также треугольникъ $aef = afb$, потому что уголъ $fae = fab$, бокъ $ab = ae$, af общiй бокъ, того ради $fb = af = ef$. Такимъ же образомъ докажется что линѣя $ef = fd$ и $= fc$; слѣдовательно изъ точки f радiусомъ fa по точкамъ a, b, c, d, e, опишется кругъ (8).

Слѣдст. I. Когда въ правильномъ многоугольникѣ каждой уголъ полигона eab, abc, bcd и проч. раздѣлится пополамъ и проведутся линѣи af, bf, ef, и проч. то оныя соединятся въ цѣнтрѣ правильнаго многоугольника; и многоугольникъ раздѣлится на столько равныхъ между собою треугольниковъ, сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ.

Слѣдст. II. Изъ чего видно, что для начерченiя правильнаго многоугольника въ кругѣ, должно окружность онаго раздѣлить на столько равныхъ частей, сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ; ибо равнымъ хордамъ ab, bc, cd, ed и ae равныя дуги

дуги соотвѣтствуютъ, и углы около точки f на равныхъ дугахъ стоящïе, суть равны между собою.

Слѣдст. III. Когда изъ центра f на каждой бокъ правильнаго многоугольника, опустятся перпендикуляры fg, fh и проч: то оные въ разсужденiи равныхъ треугольниковъ afb, bfc и проч. будутъ равны: слѣдовательно естьли одинъ изъ сихъ перпендикуляровъ возмется за радïусъ, то впишется въ многоугольникѣ кругъ $ghikl$; котораго окружность коснется боковъ правильнаго многоугольника не прорѣзывая оныхъ (84).

200. *Опредѣлен.* *Уголъ центра правильнаго многоугольника* есть тотъ, котораго бока af и bf радïусы проведенные изъ центра къ концамъ какова нибудь бока многоугольника, какъ afb.

201. ТЕОРЕМА. *Во всякомъ правильномъ многоугольникѣ, уголъ центра* afb *съ угломъ полигона* abc, *равны двумъ прямымъ угламъ или 180 град.*

Доказ. Iе. Понеже уголъ $fab = fbc$ (199) посему уголъ $(abf + fbc)$ $abc =$ углу $fab + abf =$ углу abc многоугольника, придай къ симъ угламъ, уголъ afb коего верьхъ при центрѣ, то будетъ $abc + afb = fab + abf + afb = 180$ град. (53); слѣдовательно уголъ полигона abc съ угломъ

центра afb = двумъ прямымъ угламъ или 180 градусамъ.

2е Бокъ $ab = bc$ по сему дуга $ab = bc$, уголъ же при центрѣ afb измѣряется дугою ab (13), то есть половиною дуги abc; также уголъ abc многоугольника, коего верьхъ при окружности измѣряется половиною дуги $aedc$ (91), по сему уголъ abc съ угломъ afb измѣряются половиною окружности круга которая = двумъ прямымъ угламъ или 180 град.

Слѣдст. I. Изъ сего видно, что наружной уголъ cbm, правильнаго многоугольника, равенъ углу afb при центрѣ; ибо уголъ $abc + afb = 180$ град. и уголъ $abc + mbc = 180$ град. по сему уголъ $abc + afb = abc + mbc$, а по отнятіи угла abc останется $afb = mbc$.

Слѣдст. II. Всякаго правильнаго многоугольника уголъ центра afb сыщется, когда 360 град. на число боковъ многоугольника раздѣлится, по тому что ихъ столько на окружности находится; слѣдовательно сколько разъ уголъ центра содержаться будетъ въ 360 град. столько многоугольникъ боковъ имѣетъ.

Слѣдст. III. Уголъ abc многоугольника сыщется, когда уголъ центра afb изъ двухъ прямыхъ угловъ или 180 град. вычтется.

202. ЗАДАЧА. *По данному углу полигона $167\frac{1}{7}$ град. правильнаго многоугольника; сыскать число боковъ онаго.*

Рѣшен. Уголъ полигона $167\frac{1}{7}$ град. вычти изъ 180 град. получишь уголъ центра $12\frac{6}{7}$ (201) ; потомъ на сей уголъ раздѣли 360 град. частное 28 будетъ число боковъ многоугольника.

Доказ. Понеже частное число 28, показываетъ число равныхъ дугъ находящихся на окружности круга; слѣдовательно 28 хордъ полагаемыя на равныхъ дугахъ окружности круга, опредѣляютъ правильной многоугольникъ (199).

203. ТЕОРЕМА. *Радїусъ ac всякаго круга, равенъ боку шестїугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ.*

Доказ. Сдѣлай хорду *ab* равну радїусу *ac*, проведи *bc*, при чемъ произойдетъ Ф.
треугольникъ *acb* равносторонной (26), 148.
коего уголъ *acb* = 60 град. слѣдовательно дуга *adb* шестая часть окружности, и хорда *ab* равная радїусу *ac*, есть бокъ шестїугольника *abefgh* вписаннаго въ кругѣ.

204. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ abc начертить равносторонной треугольникъ.*

ф. 149 *Рѣшен.* Проведи дïаметръ *cd* (80), раздѣли оной на четырѣ равныя части (102); чрезъ точку *g* третïй части, проведи *ab* перпендикулярно къ дïаметру *cd*, потомъ точки *b*, *c* и *a* соединя прямыми линѣями *ac* и *bc* получишь треугольникъ *abc* равносторонной.

Доказ. Проведи радïусъ *ae* и хорду *ad*. Треугольникъ *aeg* будетъ $=$ *agd*, ибо уголъ *age* $=$ *agd* прямые и бокъ *eg* $=$ *gd* по рѣшенïю, *ag* обоимъ треугольникамъ есть общïй бокъ, чего ради *ae* $=$ *ad* (30) и равна боку шестïугольника по предъидущей теоремѣ; слѣдовательно дуга *ad* шестая часть окружности; но дуга *db* $=$ *ad* (76), по сему дуга *adb* $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ окружности круга, также и дуга *ac* $=$ *bc* (76); того ради каждая $= \frac{1}{3}$ окружности круга, слѣдовательно хорды *ab*, *ac*, и *bc* равны между собою (78), и треугольникъ *abc* есть равносторонной.

Слѣдст. I. Изъ начертанïя равносторроннаго треугольника *abc* видно, что радïусъ *ae* или *ce* есть двѣ трети перпендикуляра *cg*; слѣдственно радïусъ *ce* содержится къ перпендикуляру *cg* $= 2 : 3$.

205. ТЕОРЕМА. *Квадратъ радïуса ae, содержится къ квадрату бока ac равносторроннаго треугольника acb, какъ 1 къ 3 мъ.*

Доказ.

Доказ. Понеже $ad = ae$ и ag перпендикулярна къ cd, по сему квадратъ радїуса ad равенъ прямоугольнику gh, также квадратъ бока ac равенъ прямоугольнику gk (144. 172); прямоугольникъ же $gh : gk = dg : gc$ (139): но $dg : gc = 1 : 3$ (204), слѣдовательно квадратъ радїуса ad или ae къ квадрату бока ac содержится какъ 1 къ 3 мъ.

Слѣдст. Изъ сего слѣдуетъ, что квадратъ перпендикуляра cg, содержится къ квадрату бока ac, какъ 3 : 4; ибо $\overline{cg}^2 : \overline{ac}^2 = cg : cd$ (181) $= 3 : 4$ (204). Также и квадратъ бока ac къ квадрату дїаметра cd какъ 3 : 4; потому что квадратъ бока ac равенъ прямоугольнику ci; но прямоугольникъ $ci : ch = cg : cd$ (139) или 3:4 (204); по сему $\overline{ac}^2 : \overline{cd}^2 = 3 : 4$ (ариф:229).

206. ЗАДАЧА. *По извѣстному радїусу ae равностороннаго треугольника abc, сыскать бокъ ab.*

Рѣшен. Умножь радїусъ ae квадратно, потомъ сїю площадь умножь чрезъ три, получишь площадь квадрата изъ бока ab (205), изъ котораго извлеки корень получишь бокъ ab. ф. 149

Или раздѣля радїусъ $ae = ed$ на двѣ равныя части, получишь eg (204), а по извѣстной ae и eg сыщется ag (147), наконецъ $ag \times 2 = ab$.

Слѣдст. Когда данъ будетъ бокъ *ab*: то радїусъ *ae* равностороннаго треугольника сыщется, ежели бокъ *ab* умножится квадратно, и площадь онаго раздѣлится на три части; квадратной корень сего частнаго будетъ равенъ радїусу *ae*. Или раздѣли бокъ *ab* на двѣ равныя части получишь *ag*; напослѣдокъ по извѣстной *ag* и *ac* сыщется высота *cg* (146), двѣ трети сей высоты *cg* будетъ $= ce = ae$ (204).

207. ЗАДАЧА. *По высотѣ cg равностороннаго треугольника abc; найтить бокъ ab.*

Рѣшен. Отъ высоты *cg*, возми $\frac{2}{3}$ получишь радїусъ *ce* (204), а по извѣстному радїусу, по предѣидущей задачѣ сыщется бокъ *ab*.

Или умножа *cg* квадратно сдѣлай слѣдующую пропорцїю: какъ 3 : 4 такъ квадратъ высоты *cg*, будетъ содержаться къ квадрату бока *ab*, изъ площади сего, извлеки квадратной корень получишь бокъ *ab* (204).

208. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга abc начертить равносторонной треугольникъ.*

Рѣшен. Начерти сперва въ данномъ кругѣ равносторонный треугольникъ *efd*, попомъ
ф.150 изъ центра *g* проведи радїусы *ag*, *bg* и *gc* перпендикулярно къ бокамъ треугольника *efd* (41), чрезъ точку *a* проведи

линѣю kh перпендикулярно кЪ радїусу ga. Продолжи ge и gf, пока пересѣкутся сЪ перпендикулярною kh вЪ точкахЪ k и h; потомЪ изЪ точекЪ k и h, чрезЪ концы c и b радїусовЪ gc и gb проведи ki и hi, кои взаимно пересѣкшись опредѣлятЪ равносторонной треугольникЪ khi.

Доказ. Понеже уголЪ $agk = kgc$ равными дугами ae и ec измѣряются, $cg = ag$ радїусы, и kg есть общїй бокЪ треугольникамЪ agk и cgk, по сему оные треугольники равны между собою (30); слѣдственно уголЪ $gak = gck$ прямые. ТакЪ же докажется что и уголЪ gbh есть прямой, по сему линѣи ki и hi касаются круга вЪ точкахЪ c и b (84). но вЪ четвероугольникахЪ $pgne$ и $agck$, углы gak и gpe также gck и gne прямые по рѣшенїю, и уголЪ agc есть общїй, по сему уголЪ $k = e$; равнымЪ образомЪ докажется что и уголЪ $f = h$ и $d = i$; но углы e, d, f равны между собою; того ради и углы k, h и i равны, по сему и бока hk, ki, hi равны (55), слѣдовательно треугольниЪ khi равносторонной (26).

Слѣдст. ИзЪ сего видно, что бокЪ hk описаннаго треугольника hki вдвое больше бока ef вписаннаго треугольника efd вЪ томЪ же кругѣ; ибо вЪ разсужденїи подобства треугольниковЪ egf и kgh будетЪ $gp : ga = ef : kh$; но ga вдвое больше gp (204), слѣдовательно kh вдвое больше ef.

209. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ abcd начертить квадратъ.*

No 6 ф. 151 *Рѣшен.* Сыскавъ центръ круга (80), проведи діаметръ *ab*, потомъ чрезъ центръ *g* проведи другой *cd* перпендикулярно къ первому *ab*; на конецъ точки *a*, *d*, *b* и *c* соединя прямыми линѣями *ad*, *db*, *bc*, и *ca* будетъ фигура *abcd* квадратъ.

Доказ. Понеже углы около центра *g* суть прямые по рѣшенїю, чего ради хорды *ad*, *db*, *bc* и *ca* опредѣленныя равными дугами равны между собою, также и углы *a*, *d*, *b*, *c*, по (91) прямые; слѣдовательно фигура *abcd* есть квадратъ (27).

210. ТЕОРЕМА. *Квадратъ радїуса gd, равенъ половинѣ квадрата adbc вписаннаго въ кругѣ abcd.*

Доказ. Квадратъ радїуса *gd* = треугольнику *adb* (131): но треугольникъ *adb* = половинѣ квадрата *adbc* (127) слѣдовательно квадратъ радїуса *dg* есть половина квадрата *adbc*.

211. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга adbc описать квадратъ.*

Рѣшен. Проведя два діаметра *ab* и *cd* перпендикулярно себя пересѣкающїе, чрезъ концы *a*, *d*, *b* и *c* сихъ діаметровъ проведи линѣи *ih*, *ie*, *ef* и *fh* перпендикулярно

къ дїаметрамъ ab и cd, кои взаимнымъ пересѣченїемъ въ точкахъ i, e, f и h опредѣлятъ требуемой квадратъ $efhi$

Доказ. Понеже $ab = ie = hf$, и (ab) $cd = ih = ef$, по сему $ie = hf = ih = ef$; также всѣ углы i, e, f и h прямые по рѣшенїю; слѣдовательно четвероугольникъ $efhi$ есть квадратъ.

212. ТЕОРЕМА. *Квадратъ дїаметра ab круга $abdc$, вдвое квадрата $adbc$ вписаннаго въ томъ же кругѣ.*

Доказ. Понежс треугольникъ abd = половинѣ прямоугольника ae, также и треугольникъ abc = половинѣ прямоугольника af (129); слѣдовательно квадратъ $adbc$ равенъ половинѣ квадрата $iefh$.

213. ТЕОРЕМА. *Ежели радїусъ bc круга abm, раздѣлится по наружной посредственной пропорцїи, то средняя будетъ равна боку правильнаго десятїугольника, вписаннаго въ томъ же кругѣ.*

Доказ. Положимъ что хорда ab = боку десятїугольника, чего ради уголъ acb при центрѣ будетъ имѣть 36 град. (201); по сему каждой уголъ cab и abc равенъ $\frac{180 - 36}{2} = 72$ град. (201). Раздѣли уголъ bac на двѣ равныя части линѣею ad, треугольникъ adb будетъ подобенъ abc. Ибо уголъ $dab = \frac{72}{2} = 36$ град. = углу acb, уголъ abc общїй, по сему и уголъ $adb = bac$ (53); чего для $db : ab = ab : bc$ (104); но уголъ $cab = abc = adb$, и уголъ $dab = dac = acb$, по сему и бокъ $ab = ad = cd$ (55); И такъ въ пропорцїи поставя cd вмѣсто ab, будетъ ф.152

$db : cd = cd : bc$; слѣдовательно радїусъ bc линѣею ad раздѣленъ въ точкѣ d, по наружной посредственной пропорцїи (195), и средняя $cd =$ боку ab, десятїугольника вписаннаго въ ономъ кругѣ.

Слѣдст. Ежели какая нибудь линѣя раздѣлится по наружной посредственной пропорцїи, и начертится равнобедренный треугольникъ такимъ образомъ, что средняя возмется за основанїе, а вся линѣя за наклоненной бокъ, то онаго уголъ при основанїи будетъ вдвое угла верьхняго.

214. ЗАДАЧА. *На данной линѣе ab начертить правильной пяти и десятїугольникъ.*

Рѣшен. На концѣ данной линѣи ab поставь перпендикуляръ $be = ab$, раздѣли ab въ точкѣ d попо-
ф.153 ламъ, проведи de, изъ точки d радїусомъ de опиши дугу ec, которая съ продолженною ab пересѣчется въ точкѣ c. На основанїи ab начерти равнобедренный треугольникъ, котораго бы бока ag и bg равны были ac. Около сего треугольника опиши кругъ (81); по окружности котораго линѣя ab положится пять разъ; и чрезъ то начертится правильной пятїугольникъ $abfgh$. Для начертанїя правильнаго десятїугольника, изъ верьха g радїусомъ ga или gb опиши кругъ abk, по окружности котораго нанеся данной бокъ ab десять разъ, будешь имѣть правильной десятїугольникъ.

Доказ. Понеже ac равная ag раздѣлена въ точкѣ b по наружной посредственной пропорцїи (196), и ab есть средняя пропорцїональная между ac и bc; посему равнобедренный треугольникъ abg есть такой, котораго равные углы bag и abg при основанїи вдвое верьхняго угла agb (213); слѣдовательно уголъ $agb = 36$ град. чего ради будетъ, ie проведя изъ

центра

центра m описаннаго круга радїусы am и bm, уголъ amb при центрѣ $= 72$ град. (91) $= \frac{1}{5}$ отъ 360 град. по сему дуга ab измѣряющая уголъ $amb = \frac{1}{5}$ части а дуга $ahgfb = \frac{4}{5}$ окружности круга; но дуга $ahg = gfb$, по сему каждая изъ нихъ $= \frac{2}{5}$ окружности; того ради данная линѣя ab какъ на дугѣ ahg, такъ и на дугѣ gfb положится два раза, а по всей окружности $abfgh$ пять разъ, слѣдовательно фигура $abfgh$, есть правильной пятїугольникъ (199). 2е уголъ $agb = 36$ град. по сему дуга ab есть десятая часть окружности круга $abikl$, слѣдственно данная ab, положится по окружности онаго десять разъ, и фигура $abikl$; есть правильной десятїугольникъ, (199).

Слѣдст. I. Когда изъ верьха g правильнаго пятїугольника $abfgh$ проведутся дїогонали, ag и bg, то произойдетъ равнобедренной треугольникъ abg, котораго уголъ gab или abg при основанїи вдвое верхняго угла agb; ибо уголъ amb при центрѣ всякаго правильнаго пятїугольника $= 72$ град. по сему уголъ $agb = 36$ град. слѣдовательно уголъ $gab = \frac{1}{2}(180 - 36) = 72$ град. будетъ вдвое больше agb.

Слѣдтс. II. Изъ предъидущей теоремы и задачи явствуетъ, когда дїогональ ag равная ac правильнаго пятїугольника, раздѣлится по наружной посредственной пропорцїи, то средняя будетъ $=$ боку ab пятїугольника $abfgh$.

215. **ТЕОРЕМА.** *Квадратъ бока ab пятїугольника $ablim$ равенъ суммѣ квадратовъ бока bg шестїугольника, съ квадратомъ бока ac правильнаго десятїугольника вписанныхъ въ одномъ кругѣ.*

Доказ.

ф. *Доказ*. Положимъ что хорда ab, есть бокъ
154 правильнаго пятїугольника. Изъ центра g на хорду ab опусти перпендикуляръ gc, потомъ проведи хорду ac, на которую также опусти перпендикуляръ gd. Треугольники bge и agb будутъ подобны; ибо уголъ abg общїй, уголъ $egb = gab = 54$ град. по тому что дуга $bc = 36$ град. и дуга $dc = 18$ град. по сочиненїю (76), и такъ дуга $bc + dc = 54$ град. $=$ углу $egb =$ половинѣ угла полигона пятїугольника, то есть $\frac{1}{2}(180-72)$; $= 54$ град. $=$ углу gab, и уголъ $beg = bga$ (53); чего ради $eb : bg = bg : ab$ (104), при чемъ $ab \times eb = \overline{bg}^2$. Треугольникъ $aed = dec$, поелику $ad = dc$ (76), уголъ $ade = cde$ прямые, de общїй бокъ, по сему уголъ $eac = eca$ (30). уголъ же $eac = abc$ въ равнобедренномъ треугольникѣ abc (32), по сему уголъ eca треугольника $aec =$ углу abc треугольника bac (ариф. 30), и уголъ cab у сихъ треугольниковъ общїй, по сему и уголъ $aec = acb$ (53), слѣдственно треугольникъ abc подобенъ aec (103); того ради $ae : ac = ac : ab$ (104), при чемъ $ab \times ae = \overline{ac}^2$; а придавъ сїи части, къ частямъ перваго уравненїя, будетъ $\overline{bg}^2 + \overline{ac}^2 = (ab)\, eh \times eb + (ab)\, eh \times ae = \overline{ab}^2$. ч. д. н.

216. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ $abkn$ начертить правильной пяти и десятїугольникъ.*

ф.155 *Рѣшен*. Радїусъ bf раздѣли по наружной посредственной пропорцїи въ точкѣ i (196), средняя bi будетъ равна боку десятїугольника (213); потомъ изъ точки g радїусомъ gb опиши дугу be, точки b и e соедини прямою линѣею be, которая будетъ равна боку пятїугольника. И такъ положа показанныя линѣи по окружности даннаго круга, произойдутъ требуемые многоугольники.

Докза.

Докоз. Понеже средняя $bi = bc = bl =$ боку десятїугольника (196): также $\overline{bf}^2 + \overline{fe}^2 = \overline{be}^2$ но $bf =$ боку шестїугольника, ef есть бокъ десятїугольника; ибо $gb = ge$ и $gc = gf$ радїусы, по сему $gb - gc = ge - gf = bc = bi = ef$; посей причинѣ $\overline{be}^2$ равенъ квадрату бока пятїугольника вписаннаго въ томъ же кругѣ (215); слѣдовательно хорда $be = bd$ равна боку пятїугольника.

217. ТЕОРЕМА. *Квадратъ дїогонали ai съ квадратомъ бока ab правильнаго пятїугольника abi, впятеро больше квадрата радїуса ag.*

Доказ. Изъ верьха i на основанїе ab опусти перпендикуляръ ic, которой пройдя чрезъ центръ g раздѣлитъ бокъ ab на двѣ равныя части (76), проведенная хорда ac будетъ равна боку десятїгольника. Для прямоугольнаго треугольника aci, будетъ $\overline{ac}^2 + \overline{ai}^2 = \overline{ci}^2$: но $ci = 2cg$, по сей причинѣ $\overline{ci}^2 = 4\overline{cg}^2$, также $\overline{ab}^2 = \overline{gc}^2 + \overline{ac}^2$ (215). И такъ сложа части перваго равенства съ частьми втораго, будетъ $\overline{ac}^2 + \overline{ai}^2 + \overline{ab}^2 = 5\overline{gc}^2 + \overline{ac}^2$, наконецъ отнявъ отъ обѣихъ частей $\overline{ac}^2$, будетъ $\overline{ab}^2 + \overline{ai}^2 = 5\overline{cg}^2 = 5\overline{ag}^2$, слѣдовательно сумма квадратовъ дїогонали ai съ квадратомъ бока ab впятеро больше квадрата радїуса ag правильнаго пятїугольника abi. ф. 154

218. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку ab сыскать дїогональ ag, и радїусъ am правильнаго пятїугольника agb.*

Рѣшен. и доказ. Данной бокъ ab раздѣли по наружной посредственной пропорцїи (196), придай ф. 156

къ

къ оному среднюю bc получишь $ab + cb = ac =$ дїогонали ag (214), которая сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ dbe, по извѣстной $db = \frac{1}{2}ab$ и $be = ab$ сыщется $de = dc$ (146), и $dc + ad = ac =$ дїогонали $ag = bg$; потомъ умножь дїогональ ag квадратно, и бокъ ab квадратно, сумму сихъ квадратовъ раздѣли на 5 равныхъ частей, частное будетъ равно площади квадрата изъ радїуса am (217), изъ коего извлеки квадратной корень получишь радїусъ am.

Или по извѣстной ag и ad сыщи dg (147); потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю, $dg : ag = ag$: къ дїаметру gn (172. слѣд.), которой раздѣля пополамъ получишь радїусъ $gm = am$.

Слѣдст. Когда потребуется по данной дїогонали ag найти бокъ ab; тогда дїогональ $ag = ac$ раздѣли по наружной посредственной пропорцїи, средняя будетъ $=$ боку ab пятїугольника (214).

219. ЗАДАЧА. *По извѣстному радїусу ag, правильнаго пятїугольника $abcde$; сыскать онаго бокъ ae.*

Рѣшен. и Доказ. Радїусъ ag раздѣли по наружной посредственной пропорцїи (196), средняя ah будетъ равна боку am десятїугольника (213) вписаннаго съ пятїугольникомъ въ одномъ кругѣ, которой
ф. 157 сыщется слѣдующимъ образомъ: въ прямоугольномъ треугольникѣ afk, по извѣстнымъ $af = \frac{1}{2}ag$, $ak = ag$ найдется $kf = hf$ (146), изъ которой вычти af останется $ah = am$, потомъ умножь am квадратно и радїусъ ag квадратно, площади сихъ квадратовъ сложа вмѣстѣ извлеки корень квадрата получишь бокъ ae пятїугольника $abcde$ (215).

Или сыскавъ бокъ десятїугольника am, сдѣлай слѣдующую пропорцїю, $2ag$ или $cm : am =$

$am : nm$ (172), потомъ по извѣстной nm и am сыщи an (147); на конецъ удвоя оную получишь бокъ ae даннаго пятїугольника,

220 ТЕОРЕМА. *Въ правильномъ пятїугольникѣ $abfgh$, дїогональ ag есть средняя пропорцїональная между бокомъ ad и суммою ихъ $ab + ag$.*

Доказ. Понеже $ac = ag$ и притомъ $bc : ab = ab : ac$ или ag. (196); чего ради $ab : (ab + bc) ac$ или $ag = (ac)\ ag : ab + ag$, то есть $ab : ag = ag : ab + ag$ (ариф. 228) ч. д. н. ф. 156

Слѣдст. Изъ сего видно, ежели какая нибудь линѣя раздѣлится по наружной посредственной пропорцїи, то средняя будетъ дїогональ, а меньшая бокъ правильнаго пятїугольника.

221. ЗАДАЧА. *Въ правильномъ пятїугольникѣ $abcde$ дїогональ ac съ бокомъ ae вообще извѣстны, сыскать оные порознь.*

Рѣшен. Проведя линѣю $ah = ac + ae$ раздѣли оную по наружной посредственной пропорцїи (196). Средняя $hd = gh$ будетъ равна дїогонали ac (220); которая по (218) сыщется; а наконецъ изъ суммы $ac + ae$ вычти ac остатокъ будетъ $=$ боку ae пятїугольника $abcde$. ф, 157 и 158

222. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ cf, правильнаго пятїугольника $abcde$, сыскать онаго бокъ ae.*

Рѣшен. и доказ. Данную высоту cf раздѣли по наружной посредственной пропорцїи (196). Изъ точки f радїусомъ fi опиши дугу ig, а изъ точки c высотою cf опиши другую дугу fg кои взаимно пересѣкутся ф. 159

сѣкутся

сѣкущея въ точкѣ g, проведи линѣи gc и gf, будетъ треугольникъ gfc, коего уголъ $gcf = 36$ град. а уголъ $gfc = 72$ град. (213); чего ради треугольнику ace подобенъ (213). И такъ сыскавши среднюю пропорцїональную fi (218) $= fg$, раздѣли оную на двѣ равныя части получишь $pg = pf$ (32); потомъ по извѣстнымъ pf и fc сыщется cp (147), и для подобїя треугольниковъ gfc и ace будетъ $cp : cf = gf :$ къ боку ae (104).

223. ЗАДАЧА. *На данной линѣе ab, начертить правильной осмїугольннкъ.*

Рѣшен. Данную линѣю ab, раздѣли на
ф.160 двѣ равныя части въ точкѣ c, изъ которой на ab поставь перпендикуляръ $cd = \frac{1}{2}ab$, проведи ad, опредѣли $de = ad$, изъ точки e радїусомъ ae опиши кругъ abf; по окружности онаго положа данную ab начертится требуемой осмїугольникъ.

Доказ. Ибо $ac = cd$ по рѣшенїю, по сему уголъ $cda = cad = 45$ град. (53); уголъ $cda = dea + dae$ (53), но уголъ $dea =$ углу dae противъ равныхъ боковъ ad и de; чего ради уголъ $dea = \frac{1}{2}$ угла adc, и такъ уголъ $aeb = adc = 45$ град. $= \frac{360}{8}$; по сему дуга $ab = \frac{1}{8}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда ab по окружности онаго положится 8 разъ, при чемъ произойдетъ фигура $abgfh$ правильной осмїугольникъ.

Примѣч. Для начерченїя на данной линѣе ab правильнаго 16 ти = угольника, должно

должно еще определить $ef = ae$, потомъ изъ точки f, радіусомъ af описать кругъ, по окружности котораго данная ab положится 16 разъ, и проведенныя по симъ точкамъ равныя хорды, определятъ правильной 16ти угольникъ. Ибо уголъ $afb = \frac{1}{2}$ угла aeb (91) $= 22\frac{1}{2}$ град. $= \frac{360}{16}$, следовательно дуга $ab = \frac{1}{16}$ части окружности круга радіуса fa.

224. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ abd, начертить правильной осми и шестнатцати угольникъ.*

Рѣшен. Проведи діаметръ ab, изъ центра онаго поставь перпендикуляръ cd, точки d и b соедини прямою линѣею db, на которую изъ центра c опусти перпендикуляръ ce. Хорда ed будетъ бокъ осміугольника. На сей бокъ ed опусти перпендикуляръ cm, хорда dm будетъ бокъ шестнатцатіугольника. Ф. 161

Доказ. Понеже дуга $dmeb$ есть четвертая часть окружности круга, и дуга $dme = \frac{1}{2}$ дуги $dmeb$, по сему $dme = \frac{1}{8}$ части окружности, и хорда de есть бокъ осміугольника. Дуга $dm = \frac{1}{2}$ дуги dme (76), по сему $dm = \frac{1}{16}$ части окружности, следовательно хорда $dm =$ боку шестнатцатіугольника.

225. ЗАДАЧА. *По высотѣ ek, правильнаго осміугольника $abgh$; сыскать онаго бокъ ah.*

ф. *Рѣшен. и Доказ.* Изъ центра l, опусти на bc и ac перпендикуляры lm и ln,
162 проведи mk, nk и la, при чемъ будетъ $lm = ln = lk$ (199), и lo перпендикулярна къ mk; ибо mk параллельна ac, по тому что уголъ $mkl = 45$ град. (53) = углу $akm = qac$ (201); чего ради и уголъ $anl = kol = 90$ град. (48). Также lp перпендикулярна nk; ибо уголъ $nla = alk$, и уголъ $lnk = lkn$ (32), по сему уголъ $npl = kpl = 90$ град. И такъ раздѣля высоту ek пополамъ, частное будетъ $= lk = ml = ln$, по извѣстнымъ ml и lk прямоугольнаго треугольника mlk сыщется mk (146), и $\frac{1}{2}mk = mo$ = высотѣ lo (55), которую вычти изъ ln остатокъ будетъ $= no$; потомъ въ треугольникѣ nok по извѣстной no и $ok = \frac{1}{2}mk$ сыщется nk (146), и $\frac{1}{2}nk = pk$. По извѣстной lk и pk сыщи lp (147), а напослѣдокъ для побства треугольниковъ nlk и alh сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ $lp : lk = nk$: къ боку ah.

226. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ ab, правильнаго десятіугольника gh, сыскать онаго бокъ cd.*

Рѣшен. и доказ. Изъ центра e на бокъ gc
ф. опусти перпендикуляръ ef, проведи ec и ed, точки
163 b и f соедини прямою линѣею fb, при чемъ будетъ треугольникъ $fec = ceb$, поелику $be = ef$ (199), $fc = bc$ (76), уголъ $cbe = cfe$ прямые, по сему уголъ $fec = ceb = 18$ град. также треугольникъ

fne

$fne = neb$, поелику $ef = be$, и ne общая, уголъ $fen = neb = 18$ град. слѣдственно уголъ $fne = enb$ прямые, по чему и уголъ $efb = fbe = 72$ град. но какъ уголъ $cef = ceb = bed = 18$ град. посему уголъ $(fec + ceb) feb = (ceb + bed)\ ced = 36$ град. и уголъ $ecd = cde = 72$ град. $= fbe = efb$, и треугольникъ fbe подобенъ ced, по сему линѣя fb будетъ $=$ боку десятїугольника коего радїусъ $eb = ef$. И такъ половину высоты $ab = eb$ раздѣли по наружной посредственной пропорцїи, средняя будетъ $=$ боку fb (213); потомъ по извѣстной bf, и боку $be = ef$ сыщется высота ne (154), а на конецъ для подобныхъ треугольниковъ feb и ced будетъ $ne : eb = bf$ къ боку cd (104).

227. ЗАДАЧА. *На данной линѣе ab, начертить правильной двенатцатїугольникъ.*

Рѣшен. На данной ab сдѣлай равносторонной треугольникъ abe. Изъ e на бокъ ab опусти перпендикуляръ ce, и продолжа оной опредѣли $ed = ae$, потомъ изъ d радїусомъ ad начерти кругъ, по окружности котораго положа данную ab 12 разъ получишь требуемой двенатцатїугольникъ. ф. 164

Доказ. Понеже уголъ $aeb = 60$ град. (53), треугольникъ $ace = cbe$, потому что $ac = bc$, ce обоимъ треугольникамъ общїй бокъ, и уголъ $ace = ecb$ прямые, по сему уголъ $aec = ceb = \frac{1}{2}$ угла $aeb = 30$ град. $= ead + eda$ (53); но $ed = ae$, по сему уголъ $ead = eda = \frac{1}{2}$ угла $aec = 15$ град. Равнымъ

 обра-

образомъ докажется что и уголъ $cdb = 15$ град. слѣдовательно уголъ $adb = 30$ град. $= \frac{360}{12}$ град. по сему дуга $ab = \frac{1}{12}$ части окружности, чего ради хорда ab, по окружности круга положится 12 разъ; слѣдовательно фигура abf есть правильной двенатцатїугольникъ.

228. ЗАДАЧА. *Въ данномъ кругѣ $acbg$, начертить двенатцатїугольникъ.*

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на
ф.165 окружности круга точки a, радїусомъ ad опиши дугу, которая бы прорѣзала окружность круга въ точкѣ b, проведи хорду ab, на оную изъ центра d опусти перпендикуляръ dc; напослѣдокъ проведя хорду ac получишь бокъ желаемаго многоугольника.

Доказ. Понеже $ab = bd$ по положенїю и равна боку шестїугольника (203); по сему дуга acb шестая часть окружности: но дуга $ac = bc$ (76), того ради дуга ac, есть $\frac{1}{12}$ часть окружности круга, слѣдовательно хорда ac равна боку двенатцатїугольника.

Слѣдст. Изъ того видно, когда изъ центра d, на бокъ ac двенатцатїугольника опустится перпендикуляръ df, и проведется хорда af, то оная будетъ бокъ двадцати четырехъ-угольника; а продолжая такимъ образомъ дѣленїе дугъ

на

на двѣ части начертится 48ми и 96ти угольникЪ, и такЪ далѣе.

229. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ* ab *правильнаго двенатцатїугольника* $cdbk$ *сыскать бокЪ* dc.

Рѣшен. ИзЪ центра g на бока ef и ed опусти перпендикуляры gi и gh, проведи ge, gd и gc, точки i, h и a соедини прямыми линѣями ai и ah, будетЪ $gi = gh = ag$ (199). ТреугольникЪ agi есть равносторонной, потому что уголЪ $dga = egi = agc = 15$ град. уголЪ $egd = 30$ град. по сему уголЪ $agd + dge + egi =$ углу $agi = 60$ град. и уголЪ $aig = gai = 60$ град. и такЪ уголЪ $gan - gai = ian = 30$ град. $= edn$ (201. слѣд.); слѣдственно ed параллельна ia, уголЪ $dhg = alg$ прямые (48), и gl перпендикулярна кЪ ai; по сей причинѣ уголЪ $igh = agh = 30$ град. $= dgc$ и уголЪ $hag = gha$ (32) $= gcd = cdg$, слѣдовательно треугольникЪ agh подобенЪ dgc. И такЪ раздѣля высоту ab пополамЪ частное будетЪ $ag = gi = ai = gh$. ВЪ равносторонномЪ треугольникѣ agi по извѣстнымЪ бокамЪ сыщется перпендикулярная gl, $gh - gl = hl$, и $\frac{1}{2} ai = al$. По извѣстнымЪ al и hl треугольника alh сыщется ah (146), которую раздѣля пополамЪ получишь $am = \frac{1}{2} ah$; потомЪ вЪ треугольникѣ agh сыщется высота gm (154), а напослѣдокЪ для подобїя тре- Ф. 166

 уголь-

угольниковЪ *agh* и *dgc* будетЪ $gm : ag = ha$: кЪ боку *dc* (104).

230. ЗАДАЧА. *ВЪ данномЪ кругѣ начертить правильной пятнатцатїугольникЪ.*

ф.157 *Рѣшен.* Сперва начерти вЪ кругѣ равносторонный треугольникЪ *abc* (204), потомЪ правильный пятїугольникЪ *cdefg* (216), проведи хорду *ae*, которая будетЪ бокЪ требуемаго пятнатцатїугольника.

Доказ. Понеже дуга $cda = \frac{1}{3}$ а дуга $cde = \frac{2}{5}$ окружности круга по рѣшенїю: но $\frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$, то есть дуга *cde* безЪ дуги cda = дугѣ $ae = \frac{1}{15}$ части окружности круга; слѣдовательно хорда *ae* есть бокЪ пятнатцатїугольника (199).

231. *ПредЪувѣдомленїе.* Выше уже говорено, что естьли потребуется вЪ кругѣ начертить правильной многоугольникЪ, то надлежитЪ окружность онаго раздѣлить на столько равныхЪ частей, сколько боковЪ фигура имѣть должна: но какЪ не имѣемЪ еще способа геометрическаго, то есть помощїю линѣйки и циркула, окружность круга дѣлить на столько равныхЪ частей на сколько кто желаетЪ, слѣдственно не всякой многоугольникЪ вЪ данномЪ кругѣ описать можно; для чего предлагается здѣсь способЪ какЪ начертить кривую линѣю называемую *квадратриксЪ* дїнострратовЪ (имя изобретателя), по средствомЪ котораго дѣлятся углы и дуги круга, на произвольное число равныхЪ частей.

232. ЗАДАЧА. *Начертить квадратриксЪ.*

ф.158 *Рѣшен.* Проведи произвольной длины линѣю *ab*, изЪ точки *a* поставь перпендикулярЪ $ac = ab$,

и

и растворенїемъ *ac* опиши четверть окружности круга *cgedb*, раздѣли *ac* равно и дугу *cgdb* на нѣсколько равныхъ частей, на прим. какъ здѣсь четверть окружности и радїусъ *ac* раздѣлены на 8 равныхъ частей. Изъ центра *a* проведи къ точкамъ всѣхъ равныхъ частей четверти круга прямыя линѣи *ag*, *ae*, *ad* и проч. отъ точекъ *f*, *k*, *h* и проч. равныхъ частей радїуса *ac*, проведи въ параллель *ab* линѣи *fl*, *km*, *hn* и проч. кои разрѣжутъ радїусы четверти круга въ точкахъ *l*, *m*, *n* и проч. Чрезъ всѣ сїи точки проведи кривую линѣю *clmnp*, которая будетъ квадратриксъ.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ: 1е, что означенная кривая линѣя тѣмъ исправнѣе начертиться можетъ, чѣмъ радїусъ *ac* и дуга четверти круга болѣе на равныя части дѣлена будетъ; слѣдовательно при означенїи кривой линѣи *clmnp* и чувствительной погрѣшности быть не можетъ. 2е, ежели изъ произвольно взятой на сей кривой линѣе точки *n*, протянется линѣя *hn* параллельно къ *ab*, а потомъ раздѣлится *hc* на нѣсколько равныхъ частей, на прим. на 3 и проведутся параллельныя линѣи *fl* и *km*, кои прорѣжутъ кривую линѣю въ точкахъ *l* и *m*, также и чрезъ сїи точки радїусы *ag*, *ae* и *ad*: то дуга *cg*, будетъ содержаться къ дугѣ *cd*, какъ линѣя *cf* къ линѣѣ *ch*; и въ сей-то пропорцїи состоитъ свойство сея кривыя линѣи.

233. ЗАДАЧА. *Данной уголъ bac раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Начерти сперва кривую линѣю квадратриксъ какъ показано (232), и при оной опиши четверть круга *ge*, потомъ сдѣлай уголъ *gdn* = данному *bac*. Изъ точки *o* гдѣ бокъ *dn* угла *gdn* прорѣзываетъ кривую линѣю *gf*, опусти на радїусъ *dg* перпендикуляръ *ok*, отрѣзанную симъ перпендику- ф.169

ляромъ часть gh раздѣли на три равныя части въ точкахъ i и k (102), отъ сихъ точекъ протяни линѣи kl и im параллельно къ ho, кои прорѣжутъ кривую линѣю въ точкахъ l и m, проведи чрезъ оные точки радїусы dp и dq, при чемъ дуга gn раздѣлится на три равныя части въ точкахъ p и q

Доказ. Ибо по свойству кривой линѣи, $gk : gh = gp : gn$; но $gk = \frac{1}{3}gh$, по сему и дуга gp будетъ равна $\frac{1}{3}$ дуги gn. Что и о прочихъ разумѣть должно.

Примѣч. При раздѣленїи тупаго угла trs на три равныя части, произойти можетъ нѣкоторая неудобность, потому что дуга vx не можетъ содержаться въ дугѣ gne; въ семъ случаѣ данной уголъ trs раздѣли прежде на двѣ равныя части (46), потомъ половину онаго угла urs раздѣли на три равныя части какъ и прежде въ точкахъ p и q, дуга gq будетъ третья часть дуги vx.

234. ЗАДАЧА. *Прямой уголъ dab, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Изъ точки a, радїусомъ ab
ф.170 опиши дугу bed, потомъ изъ точки b перенеси радїусъ ab на хорду bc, на которую опусти перпендикуляръ ae, при чемъ прямой уголъ bad, раздѣлится на три равныя части.

Доказ. Понеже уголъ $bac = \frac{2}{3}$ прямаго угла; посему уголъ $dac = \frac{1}{3}$ прямаго, но какъ уголъ cab линѣею ae раздѣленъ на двѣ равныя части, чего ради уголъ $eac = eab = \frac{1}{3}$ прямаго угла bad.

235. ЗАДАЧА. *ВЪ данномЪ кругѢ bdcf, начертить правильной семѣугольникЪ.*

РѢшен. Четверть окружности cdb, раздѢли на семь равныхЪ частей (233), потомЪ отсчитай отЪ b до d четыре оныхЪ части, проведи хорду bd которая будетЪ бокЪ желаемаго многоугольника. ф. 171

Доказ. Понеже каждая изЪ сихЪ частей есть, 28 я часть окружности; по сему 4 седьмины четверти круга, $= \frac{1}{7}$ части всея окружности тогожо круга, слѢдовательно хорда bd сей дуги, есть бокЪ требуемаго семїугольника.

РѢшен. ДругимЪ образомЪ, сперва вЪ данномЪ кругѢ начерти равносторонный треугольникЪ efc, бокЪ онаго ef раздѢли пополамЪ вЪ g, половина бока $eg = gf = eh$ будетЪ бокЪ желаемаго семїугольника. Справедливость сего рѢшенїя доказана будетЪ вЪ тригонометрїи на своемЪ мѢстѢ.

СлѢдст. ТакимЪ образомЪ какЪ вЪ первомЪ случаѢ показано, начертится вЪ кругѢ правильной девяти, одиннатцати и болѢе угольникЪ; когда четверть окружности раздѢлится на столько равныхЪ частей, сколько многоугольникЪ боковЪ имѢть долженЪ, и проведется хорда стягивающая четыре части: то оная хорда равна будетЪ боку желаемаго многоугольника.

236. ЗАДАЧА. *На данной линѢе ab начертить правильной семѣугольникЪ.*

РѢшен. На данной ab поставь перпендикулярЪ $bc = ab$. ИзЪ точки b радїусомЪ ab опиши дугу acd, раздѢли четверть окружности ac на семь равныхЪ частей (233), сдѢлай $cd = \frac{3}{7}$ дуги ac, уголЪ abd раздѢли на двѢ равныя части линѢею be ф. 172

(46), потомъ у точки a сдѣлай уголъ $bae = abe$ (45), изъ точки e радїусомъ ae опиши кругъ, по окружности котораго хорду ab положа семь разъ, получишь требуемой семїугольникъ.

Доказ. Понеже дуга ac имѣетъ 7 а дуга acd 10 равныхъ частей, слѣдовательно дуга ac содержится къ дугѣ acd какакъ 7 къ 10 ти; чего ради будетъ $7 : 10 = 90$ град. (прямой уголъ abc) къ $128\frac{4}{7}$ угла abd (13): но уголъ abd вдвое угла abe и вдвое равнаго сему bae, посему уголъ $abd = abe + bae = 128\frac{4}{7}^{\circ}$; чего ради уголъ $aeb = 180^{\circ} - 128\frac{4}{7}^{\circ} = 51\frac{3}{7}^{\circ}$; но $51\frac{3}{7}^{\circ} = \frac{360}{7}$, Слѣдовательно дуга ab есть седьмая часть окружности круга $abdf$, и хорда ab положится по оной точно семь разъ (199).

Рѣшен. *Другимъ образомъ.* На продолженной ab сдѣлай $bc = ab$. начерти на ac равносторонный треугольникъ acd изъ верьха a на линѣю cd опусти перпендикуляръ ag, потомъ на данной ab сдѣлай равнобедренный треугольникъ, котораго бы косыя бока af и bf равны были $\frac{2}{3}$ ag, изъ точки f гдѣ бока взаимно пересѣкутся, радїусомъ af опиши кругъ, по окружности котораго бокъ ab положится семь разъ, при чемъ произойдетъ правильной семїугольникъ.

Справедливость рѣшенїя сея задачи доказана будетъ въ тригонометрїи.

237. ЗАДАЧА. *На данной линѣе ab, начертить правильной девятїугольникъ.*

Ф. 173 *Рѣшен.* Изъ точки b, на данной линѣе ab поставь перпендикуляръ $be = ab$ (58), потомъ изъ точки b радїусомъ ab опиши дугу aed, четверть окружности

окружности *ae* раздѣли на 9 равныхЪ частей (233), опредѣли дугу $ed = \frac{5}{9}$ дуги *ae*, проведи *bd*, уголЪ *abd* раздѣли линѣею *bc* пополамЪ (46), потомЪ сдѣлай уголЪ $bac = abc$; изЪ точки *c* радїусомЪ *ac* опиши кругЪ, по окружности котораго положа линѣю *ab* девять разЪ, получишь требуемой девятїугольникЪ.

Доказ. Понеже дуга *ae* содержится кЪ дугѣ *ad* какЪ 9 кЪ 14, по сему и уголЪ $abe : abd = 9 : 14 = 90^{\circ} : 140^{\circ}$ (13); но уголЪ $abc = dbc = bac$ по рѣшенїю, чего ради уголЪ $abd = abc + bac = 140^{\circ}$, по сему уголЪ $acb = 40^{\circ} = \frac{360}{9}$; слѣдственно дуга *ab* есть девятая часть окружности круга, и хорда *ab* по окружности онаго положится девять разЪ.

Слѣдст. ТакимЪ образомЪ сыскавЪ содержанїе прямаго угла кЪ углу полигона начертится всякой правильной многоугольникЪ.

238. ЗАДАЧА. *ВЪ данномЪ кругѣ по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникЪ.*

Рѣшен. ПоложимЪ что вЪ данномЪ кругѣ требуется начертить правильной девятїугольникЪ. Чего ради сыщи уголЪ центра девятїугольника (201), потомЪ положа транспортирЪ такЪ, чтобЪ центрЪ онаго находился вЪ центрѣ круга, а дїаметрЪ его на дїаметрѣ круга, отЪ точки *e* до *f* отсчитай столько градусовЪ сколько уголЪ центра имѣть долженЪ, потомЪ чрезЪ замѣченную точку *f* проведи

No 7 ф. 174

веди радїусъ *ac*, хорда *bc* будетъ бокъ желаемаго многоугольника вписаннаго въ кругѣ.

Доказ. Понеже уголъ центра $\frac{360^\circ}{9} = 40^\circ$ = углу *cab*, по сему дуга *bc* девятая часть окружности; слѣдовательно хорда *bc* на оной положится девять разъ, при чемъ начертится правильной девятїугольникъ.

239. ЗАДАЧА. ***На данной линѣе ab, по транспортиру начертить какой нибудь правильной многоугольникъ.***

Рѣшен. Сыщи сперва уголъ центра
ф.175 многоугольника (201), которой вычтя изъ 180° получишь уголъ полигона. Раздѣли оной пополамъ; потомъ положи транспортиръ такъ, чтобъ центръ онаго былъ въ концѣ линѣи *a*, а дїаметръ онаго простирался бъ по линѣе *ab*, по окружности котораго отъ *e* до *f*, отсчитай столько градусовъ сколько половина угла много угольника въ себѣ заключать должна, то же сдѣлай и у конца *b*; потомъ чрезъ замѣченнныя точки *f* и *f*, проведи линѣи *ac* и *bc*, изъ точки *c* радїусомъ *ac* опиши кругъ, по окружности котораго нанеся хорду *ab*, получишь требуемой многоугольникъ.

Доказ. Положимъ что на данной линѣе *ab* требовалось начертить правильной

осьмї-

осмїугольникЪ: то уголЪ acb при центрѣ правильнаго осмїугольника будетЪ $= \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ (201), и $\frac{180^\circ - 45^\circ}{2} = 62\frac{1}{2}$ = углу $abc = bac$ по рѣшенїю, посему уголЪ $abc + bai = 135^\circ$ слѣдственно $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ = углу acb = углу центра осмїугольника; чего ради дуга ab есть осьмая часть окружности, и хорда ab по оной положится осемЪ разЪ.

240. ЗАДАЧА. *Около даннаго круга, начертить правильной многоугольникЪ.*

Рѣшен. ВЪ данномЪ кругѣ начерти правильной многоугольникЪ подобной желаемому, на пр. пятїугольникЪ $abcde$ (216). ИзЪ центра f проведи прямую линѣю fh перпендикулярную кЪ боку ab, которая оную вЪ точкѣ g равно и соотвѣтствующую сей хордѣ дугу ahb вЪ точкѣ h раздѣлитЪ на двѣ равныя части; изЪ крайнихЪ точекЪ a и b проведи радїусы fa и fb, чрезЪ точку h продолжа радїусы fa и fb до i и k, проведи линѣю ik параллельную кЪ ab, которая будетЪ бокЪ требуемаго многоугольника; потомЪ продолжи радїусы fe, fd и fc такЪ, что бы была $fi = fn = fm = fl = fk$; на послѣдокЪ точки i, n, m, l и k соединя прямыми линѣями in, nm, ml и lk произойдетЪ желаемой многоугольникЪ $iklmn$ около круга описанный. ф. 176

Доказ. Понеже ab параллельна ik, и fh перпендикулярна кЪ ab и ik, уголЪ fga = углу fhi прямые, посему линѣя ik касается даннаго круга вЪ точкѣ h (84), также уголЪ fab = углу fik и уголЪ $fba = fki$ (48): но линѣя $fi = fn = fm =$ и пр. также и уголЪ $ifk = ifn = nfm = mfl$ при центрѣ вписаннаго пятїугольника; посему треугольники

ники *ifk*, *ifn*, *nfm* и пр. равны между собою; по сей причинѣ бокъ $ik = in = nm =$ и пр. перпендикулярная $fk = fo = fp$ и пр. радїусы круга по рѣшенїю; равнымъ образомъ докажется что уголъ $kin = inm = nml =$ и пр. слѣдовательно пятїугольникъ *iklmn* есть правильной (197), и каждой онаго бокъ касается окружности круга (84).

О ПОДОБНЫХЪ ФИГУРАХЪ И СОДЕРЖАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ РАЗНЫХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ФИГУРЪ.

ф. 177 241. *Опредѣл.* *Подобныя фигуры* *efk* и *mnr* называются тѣ, кои будучи раздѣлены одинакимъ образомъ на треугольники, и оные треугольники какъ на пр. *efq* *eql* и пр. одной фигуры *efk*, подобны сходственнымъ треугольникамъ *mno*, *mos* и пр. другой фигуры *mnr*.

ф. 179 242. *Опредѣлен.* *Одноцентрные* круги называются тѣ, кои имѣютъ общїй центръ какъ *A*. *Разноцентрные* суть тѣ, кои не имѣютъ общаго центра, какъ *B*.

ф. 180 243. *Опредѣлен.* *Секторъ* или *вырѣзокъ* круга, есть пространство опредѣленное двумя радїусами круга *cd* и *cb* и частью окружности *dmb*.

ф. 182 и 183. 244. *Опредѣлен.* *Подобные секторы* называются тѣ, коихъ углы *eaf* и *fem* заключающїеся радїусами равны, какъ *fae* и *efm*.

245. ЗАДАЧА. *Сдѣлать фигуру равну и подобну данной abdefgc.*

Рѣшен. Данную фигуру, *abdefgc* сперва раздѣли произвольнымъ образомъ на треугольники линѣями изъ одного угла въ другой проведенными, какъ значитъ въ фигурѣ; потомъ проведя линѣю $ef=ab$, сдѣлай на оной треугольникъ $efq=abd$, на линѣе *eq* треугольникъ $eql=adc$, на линѣе *lq* треугольникъ $lqk=cdg$, также на линѣе *kq* треугольникъ $kqi=dgf$; и на конецъ на линѣе *qi* треугольникъ $qih=dfe$, при чемъ произойдетъ фигура *efqhikl* равна и подобна данной *abdefgc.* ф. 178

Доказ. Понеже треугольники данной фигуры равны и подобны сходственнымъ треугольникамъ сдѣланной фигуры по рѣшенiю; того ради фугура *abdefgc* равна и подобна фигурѣ *efqhikl* (241).

246. ЗАДАЧА. *На данной линѣе mn, сдѣлать фигуру подобну данной efqhikl.*

Рѣшен. Данную фигуру, раздѣли какъ и прежде на треугольники (245), потомъ ф177 у точки *m* данной линѣи *mn* сдѣлай уголъ $nmo=feq$, у точки *n* уголъ $mno=efq$, также у конца линѣи *mo* сдѣлай уголъ $oms=$ углу *leq*, а у точки *o* уголъ $mos=$ углу *eql*; потомъ на линѣе *os* такимъ же образомъ сдѣлай треугольникъ *osr* подобенъ *qlk*, также и на линѣе *or* сдѣлай тре-

треугольникъ *ort* подобенъ *qki* и наконецъ на линѣе *ot* здѣлай треугольникъ *otp* подобенъ *qih* (59); при чемъ произойдетъ требуемая фигура.

Доказ. Понеже треугольники данной фигуры *efqhikl* подобны сходственнымъ треугольникамъ здѣланной фигуры *mno ptrs* по рѣшенїю; того ради оная подобна данной (241).

247. ТЕОРЕМА. *Окружности подобныхъ фигуръ abdefgc и efqhikl содержатся между собою какъ сходственные бока ab и ef или ac : el.*

ф.178 *Доказ.* Понеже треугольники фигуры *abdefgc*, подобны треугольникамъ другой фигуры *efqhikl*; то для подобства оныхъ треугольниковъ будетъ $db : qf = ab : ef = ad : eq = ac : el = cd : lq = cg : lk = dg : qk = gf : ki = df : qi = ef : hi = ed : qh$ (104): но въ разсужденїи равенства содержанїй будетъ $db : qf = ab : ef = ac : el = cg : lk = gf : ki = ef : ih = ed : qh$; также $db + ab + ac + cg + gf + fe + ed : qf + ef + ei + lk + ki + ih + qh = ab : ef$ (ариф. 241), то есть окружность фигуры *abdefgc*, къ окружности фигуры *efqhikl* какъ бокъ *ab* къ боку *ef*, или *ac* : *el* и проч.

248. ТЕОРЕМА. *Окружности правильныхъ многоугольниковъ одного числа*

боковъ

боковъ, содержатся какъ радiусы, или перпендикуляры отъ центра.

Доказ. Пусть будутъ правильные пятiугольники *bck* и *del*. Сыскавъ оныхъ центры *g* и *f* (199), проведи радiусы *bg*, *gc*, *fd* и *fe*, изъ центровъ *g* и *f* опусти перпендикуляры *ga* и *fh*; треугольники *bgc* и *def* будутъ подобны, ибо уголъ *bgc* = *dfe* при центрѣ, также уголъ *cbg* = *edf*, уголъ *bcg* = *def* каждой = $\frac{1}{2}$ угла полигона, и для подобства треугольниковъ *bc* : *de* = *ag* : *fh* (104), а умножа члены перваго содержанiя чрезъ число боковъ, то есть чрезъ 5, будетъ 5*bc* : 5*de* = *bg* : *df* = *ag* : *fh* (ариф. 232); то есть окружность пятiугольника *bck* къ окружности другаго *del* содержится какъ радiусъ *bg* къ *df* или перпендикуляръ отъ центра *ag* къ *fh*. ф. 181

Слѣдст. I. Изъ сего слѣдуетъ что окружности круговъ *fsh* и *fmx*, содержатся какъ радiусы *ah* и *ex* или дiаметры *fh* и *fx*; ибо ежели вообразимъ себѣ, что окружности круговъ *efh* и *fmx* состоятъ изъ безконечнаго множества такихъ частей, изъ коихъ каждая ничемъ не разнится отъ прямой линѣи, какъ на прим. части *hg* и *xy*, тогда круги можно будетъ почитать подобными правильными многоугольниками имѣющими безчисленное число боковъ. И такъ пусть ф. 182 и 183

будетъ какъ въ одномъ, такъ и въ другомъ число боковъ N, бокъ перваго $hg = z$, бокъ втораго $xy = v$ и ежели изъ центровъ оныхъ къ концамъ боковъ проведены будутъ линѣи, то углы при центрахъ, такъ какъ и углы многольниковъ будутъ равны между собою. Того ради для подобїя треугольниковъ hag и xey будетъ $z : v = ah : ex$, а умножа члены перваго содержанїя чрезъ N, будетъ $z \times N : v \times N = ah : ex$ (ариф. 232); но $z \times N$ и $v \times N$ означаютъ окружности круговъ, слѣдовательно окружности круговъ содержатся между собою какъ ихъ радїусы, или цѣлые дїаметры.

Слѣдст. II. Въ подобныхъ секторахъ *fae* и *fem* дуги *fse* и *fm*, содержатся между собою какъ радїусы *af* и *ef*, или какъ хорды *fe* и *fm*; ибо положимъ что дуга $fse = \frac{1}{15}$ части окружности *efh*; того ради и дуга $fm = \frac{1}{15}$ части окружности *fxm*: но по предъидущему слѣдствїю окружность $ehf : fxm = af : ef$, посему $\frac{1}{15}$ *ehf* или *fse* къ $\frac{1}{15}$*fam* или $fm = af : ef = fe : fm$ (104); слѣдовательно дуга *fse* къ дугѣ *fm*, какъ хорда *fe* къ хордѣ *fm* (ариф. 218).

249 ТЕОРЕМА. *Плоскость правильнаго многоугольника abhckl равна треугольнику amg, котораго основанїе ag*

равно

равно суммѣ боковъ многоугольника, а высота тр равна перпендикуляру опущенному изъ центра т на одинъ изъ его боковъ.

Доказ. Для доказательства сего, пусть будетъ правильной шестiугольникъ *abck*, въ которомъ ежели проведутся изъ центра *m* ко всѣмъ угламъ радiусы, то оной раздѣлится во столько равныхъ треугольниковъ сколько многоугольникъ боковъ имѣетъ (199). И такъ многоугольникъ *abck* составленъ изъ шести треугольниковъ равныхъ *amb*: но треугольники *amb* и *amg* имѣютъ одну и общую высоту *mp*: то оные содержатся какъ ихъ основанiя (139); основанiе жъ *ag* вшестеро больше основанiя *ab*, по сей причинѣ треугольникъ *amg* будетъ вшестеро больше треугольника *amb*; но шестiугольникъ *abck* вшестеро больше треугольника *amb*, слѣдовательно треугольникъ *amg* равенъ шестiугольнику *abhckl*. ф. 184.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, что плоскость всякаго правильнаго многоугольника, равна параллелограму котораго основанiе *af* равно полсуммѣ боковъ, а высота *mp* равна перпендикуляру отъ центра многоугольника: слѣдовательно плоскость всякаго правильнаго многоугольника равна произведенiю изъ суммы боковъ на поло-

вину перпендикуляра отъ центра *mp*, или изъ полусуммы боковъ на перпендикуляръ *mp*.

250. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку ae, пятїугольника abcde сыскать онаго площадь.*

No 6 ф.157 *Рѣшен.* Сперва надлежитъ сыскать радїусъ *ag* $=$ *eg* пятїугольника *abcde* (218); потомъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника *age* сыщи перпендикуляръ *gn* (154); напослѣдокъ умножь полсуммы боковъ пятїугольника *ace* перпендикуляромъ *gn*, получишь требуемую площадь пятїугольника *abcde*, то есть $\frac{5ae \times gn}{2}$ (249).

Примѣчан. Такимъ же образомъ легко сыскаться можетъ по извѣстному боку правильнаго на прим. 6 ти, 10 ти и 12 ти угольника радїусъ, перпендикуляръ отъ центра, высота и площадь, естьли только разсмотрится составленїе каждаго изъ сихъ многоугольниковъ (§. 203, 223, 214. 227), чего ради таковыя задачи здѣсь и не прилагаются.

251. ЗАДАЧА. *По извѣстному радїусу lh, правильнаго осмїугольника ahf; сыскать бокъ ah и площадь онаго.*

Рѣшен. и Доказ. Проведи радїусы *lg* и
ф.162 *li*, точки *g* и *h* соедини прямою линѣею *gh*, будетъ уголъ *gli* $=$ *hli* $=$ 45 град. (201); слѣдовательно уголъ *hlg* $=$ 90 град. и уголъ *lhg* $=$ *lgh* (53) $=$ 45 град. $=$ *qlg*. И такъ по извѣстнымъ *lg* и *lh* сыщется *gh* (146); раздѣли оную пополамъ частное

будетъ

будетъ $= gq = lq$ (55). $li - lq = qi$, въ треугольникѣ hqi по извѣстной hq и qi сыщется hi (146) $=$ боку ah; потомъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника alh сыщется высота lk (154), чрезъ которую умножъ полсуммы боковъ правильнаго осмiугольника, произведенiе будетъ требуемая площадь (249).

252. ЗАДАЧА. *По радiусу ec правильнаго десятiугольника gda сыскать бокъ cd и площадь онаго.*

Рѣшен. Радiусъ ce раздѣли по наружной посредственной пропорцiи, средняя будетъ равна боку cd правильнаго десятiугольника gda (213); потомъ сыщи среднюю пропорцiональную cd (219). По извѣстнымъ бокамъ ce, cd и ed треугольника ced, сыщется перпендикуляръ eb, чрезъ которой умножа полсуммы боковъ десятiугольника, получишь требуемую площадь (249). ф.163

253. ЗАДАЧА. *По данному радiусу gc двенатцатiугольника dcb, сыскать онаго бокъ dc и площадь.*

Рѣшен. Проведи радiусы gr и gp, точки c и r соедини прямою линѣею rc. Треугольникъ gcr будетъ равносторонной; ибо уголъ $cgp = pgr = 30$ град. посему $cgp + pgr = 60°$, и уголъ $crg = gcr$ (32) $= 60$ град. по сей причинѣ уголъ $gqc = gqr$, слѣдственно gq перпендикулярна къ cr; и такъ по извѣстному боку cr равносто- ф.166

 роннаго

роннаго треугольника cgr сыщется высота gq (149); и $gp - gq = qp$. $\frac{1}{2}rc = cq = qr$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ cqp, по извѣстной cq и qp найдется бокъ $cp = dc$ (146); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ треугольника cgd, сыщется высота ag (154), которую умножь на полсуммы боковъ правильнаго двенатцатїугольника, произведенїе будетъ требуемая площадь (249).

Примѣч. Когда потребно будетъ по извѣстному радїусу сыскать бокъ 24 хъ угольника, то оной по (228) легко опредѣлиться можетъ.

254. ЗАДАЧА. *По данному радїусу af, сыскать бокъ ik какого нибудь правильнаго многоугольника, описаннаго около круга на прим. пятїугольника ikm.*

Рѣшен. Сперва по данному радїусу af, сыщи бокъ ab правильнаго пятїугольника вписаннаго
No 7 въ кругѣ (219); потомъ по извѣстнымъ бокамъ тре-
Ф. угольника afb, сыщи перпендикуляръ fg (154), на-
176. конецъ для подобїя треугольниковъ afb и kfi будетъ $fg : fh = ab$: къ боку ik.

Примѣчан. Такимъ образомъ сыщется бокъ всякаго правильнаго многоугольника.

255. ТЕОРЕМА. *Плоскость круга xfm равна треугольнику exc, котораго основанїе равно окружности, а высота равна радїусу ex того же круга.*

Доказ.

Доказ. Ибо естьли назовемъ, что кругъ есть правильной многоугольникъ имѣющiй безконечное число боковъ (248); то окружность онаго можно взять за сумму сихъ боковъ а радiусъ *ex* за перпендикуляръ упадающей изъ центра на безконечно малой бокъ *by* сего многоугольника, слѣдственно по предъидущей теоремѣ кругъ будетъ равенъ треугольнику *exc*, котораго основанiе *xc* равно окружности круга а высота равна радiусу *ex*. ф. 183

Слѣдст. I. Изъ того слѣдуетъ, что кругъ равенъ прямоугольнику, котораго основанiе *xd* равно половинѣ окружности *xc*, а высота = радiусу *ex* (131). Также равенъ прямоугольнику *hf*, коего основанiе *hx* равно четверти окружности а высота = дiаметру *xf*. Ибо ежели *xh* = *hd* = *ce* = четверти окружности круга, и *hc* = радiусу *ex* или *ef*, то прямоугольникъ *dc* будетъ = *cf* (129), а придавъ къ каждому общiй прямоугольникъ *he*, будетъ прямоугольникъ *de*, или площадь круга *xfm* равна прямоугольнику *hf*, коего основанiе *xh* равно четверти окружности а высота дiаметру *xf*. Изъ сего явствуетъ, что площадь круга равна произведенiю, изъ окружности на половину радiуса *ex*, или равна произведенiю половины окружности на радiусъ, и равна также произведенiю четверти окружности дiаметромъ умноженной.

Слѣдст. II. Плоскость вырѣзка круга *emx*, равна произведенїю дуги *mx* половиною радїуса *ex* умноженной. Ибо ежели вообразимъ что вырѣзокъ *emx*, состоитъ изъ безконечнаго множества треугольниковъ какъ *xey*, *yed* и проч. коихъ всѣ верьхи въ центрѣ круга, а основанїи ихъ безконечно малыя части окружности; и что плоскость каждаго изъ сихъ треугольниковъ равна произведенїю изъ основанїя и половины радїуса *ex*, которой есть общая ихъ высота; то плоскость цѣлаго вырѣзка будетъ равна произведенїю суммы всѣхъ основанїй или дуги *mx*, чрезъ половину радїуса *ex* умноженной. Изъ сего явствуетъ, что плоскость вырѣзка *emx* равна треугольнику *exp* коего основанїе *xp* равно дугѣ *mx*, а высота радїусу *ex*,

Примѣчан. I. Чтобъ найти площадь круга: (или такъ называемую квадратуру круга, то есть такое предложенїе, по средствомъ бы котораго можно сдѣлать квадратъ площадью равной данному кругу) то надлежитъ сперва найтить прямую линѣю которая бы равна была окружности круга; но какъ мы не имѣемъ еще способа геометрическаго, находить прямую линѣю совѣршенно равную окружности круга, или содержанїе дїаметра къ своей окружности, и площади круга, то довольствоваться должны таkими

кими содержанiями, которыя отъ истиннаго никакой чувствительной погрѣшности имѣть не могутъ, каковы суть слѣдующiя: 1е *Архимедово*, ежели дiаметръ круга раздѣлится на 7 равныхъ частей, то такихъ въ окружности его будетъ почти 22. 2е *Цейлгнонюво* есть 100 : 314. 3е *Мецiво* 113 : 355, изъ коихъ вернѣйшее есть послѣднее.

Примѣч. II. Понеже изъ первыхъ правилъ геометрiи довольно извѣстно, что окружность круга больше нежели окружность каждаго многоугольника вписаннаго въ семъ кругѣ, а меньше окружности каждаго многоугольника описаннаго около того же круга; и чѣмъ больше боковъ фигура имѣть будетъ, тѣмъ меньше разнится окружность круга отъ окружности вписаннаго или описаннаго многоугольника, и разность наконецъ изчезаетъ тогда, когда число боковъ будетъ безконечно. Сiе упомянувши покажемъ мы что дѣлалъ архимедъ при исканiи содержанiя дiаметра къ окружности круга. Сперва написалъ онъ въ кругѣ (какъ видно) шести, потомъ 12 ти, 24, 48 ми, и 96 ти угольникъ; равнымъ образомъ описалъ и около круга такой же многоугольникъ; и по средствомъ радiуса круга, сыскалъ вопервыхъ бокъ 12 угольника, потомъ 24, 48 и наконецъ исчислилъ длину одного изъ боковъ каждаго 96 ти угольника (253 и 254),

и окружность слѣдовательно нашелъ умноженіемъ найденнаго числа чрезъ 96. И такъ положивши діаметръ круга равнымъ единицѣ, нашелъ окружность вписаннаго многоугольника больше нежели $3\frac{10}{71}$ діаметра, а описаннаго также больше нежели $3\frac{10}{70}$ или $3\frac{1}{7}$; изъ чего заключилъ что окружность круга находящаяся между сими двумя окружностями многоугольниковъ, должна быть непремѣнно также больше нежели $3\frac{10}{71}$, а меньше нежели окружность описаннаго 96 угольника, то есть, когда діаметръ круга будетъ имѣть 7 частей, то должно чтобъ окружность круга была больше нежели 21 а меньше окружности описаннаго 96 ти угольника: но какъ $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ нѣсколько меньше окружности описаннаго 96 угольника, слѣдственно число 22 гораздо ближе къ окружности нежели 21, по сей то причинѣ архимедъ и принелъ содержаніе діаметра къ окружности какъ 7 : 22. Сіе содержаніе употреблять можно почти безъ погрѣшности въ такихъ только случаяхъ гдѣ не требуется самой точности; а въ тѣхъ дѣйствіяхъ, въ коихъ надлежитъ опредѣлить окружность круга съ большею точностію, должно употреблять содержаніе 113 : 355 найденное господиномъ меціемъ; коего справедливость, также и цейленонова содержанія діаметра къ окружности (которыя ближе къ точности нежели архимедово) доказана будетъ въ тригонометріи на своемъ мѣстѣ.

256.

256. ЗАДАЧА. *По извѣстному дїаметру* $ab = 80^\circ$ *круга* $bgdm$, *сыскать онаго окружность и площадь.*

Рѣшен. Сдѣлай по Архимедову содержанїю ф.180
слѣдующую пропорцїю, $7 : 22 = 80^\circ : \frac{80 \times 22}{7} = 251^\circ, 42857^v$ = окружности круга; или по мецїеву содержанїю какъ $113 : 355 = (ab) 80^\circ : \frac{80^\circ \times 355}{113} = 251^\circ, 32743^v$ = окружности круга bgd. По томъ умножь окружность половиною радїуса cb, или четвертью дїаметра ab, то есть $251^\circ, 32743^v \times 20^\circ = 5026^\circ. 54860^v$ = площади круга (255).

257. ЗАДАЧА. *Извѣстны въ кругѣ* $adbg$, *дїаметръ* ab *съ окружностїю* $bgdm$ *вообще, сыскать оные порознь.*

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцїю: какъ 29 къ 7 ми, такъ сумма дїаметра съ окружностью, то есть $ba + bgd$ содержится къ дїаметру ba, которой вычтя изъ общей суммы остатокъ будетъ равенъ окружности bgd. Ибо $7 : 22 = ba : bgd$ (248); посему $(7 + 22) 29 : 7 = ba + bgd$ къ дїаметру ba (ариф. 228).

258. ЗАДАЧА. *По извѣстной дугѣ* dmb *и радїусу* cd, *сыскать площадь вырѣзка круга* $dcbm$.

Рѣшен. Дугу dmb, умножь половиною радїуса cd, получишь желаемую площадь вырѣзка круга (255).

259. ЗАДАЧА. *По извѣстной дугѣ* dmb, *и градусамъ* x *угла* dcb; *сыскать площадь вырѣзка круга* $dcbm$.

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцїю: какъ градусы $x : 360^{\circ}$ такъ дуга dmb содержится къ окружности $adbg$ (13); потомъ $22 : 7$ такъ окружность $adbg$ къ дїаметру ab (255); которой раздѣля пополамъ получишь радїусъ bc. Умножь половиною радїуса bc дугу bd, произведенїе будетъ требуемая площадь вырѣзка круга $dcbm$.

260. ТЕОРЕМА. *Площадь вырѣзка круга* $dcbm$ *къ площади круга* $dgbm$ *содержится какъ градусы* x *угла* dcb, *къ 360 градусамъ.*

ф.180 *Доказ.* Понеже дуга dmb къ окружности круга $dgbm$, содержится какъ градусы x угла dcb къ 360° (13), а умножа первые члены сей пропорцїи чрезъ $\frac{1}{2}bc$, будетъ $\frac{1}{2}\,dmb \times bc : \frac{1}{2}dgbm \times bc = x : 360$ град. (ариф. 232): но $\frac{1}{2}dmb \times bc$, есть площадь вырѣзка круга $dcbm$, а $\frac{1}{2}\,dgbm \times bc$ есть площадь круга $dgbm$ (255), слѣдовательно площадь вырѣзка $dcbm$, къ площади круга $dgbm$ какъ $x : 360^{\circ}$.

261. ТЕОРЕМА. *Площадь круга* xfm *къ квадрату дїаметра* xf, *содержится какъ четверть окружности* hx *къ дїаметру* xf, *или по содержанїю архимедову* $11 : 14$, *цейленонову* $157 : 200$, *мецїеву* $355 : 452$.

Доказ.

Доказ. Понеже прямоугольникъ $hf=$ площади круга xfm (255), и притомъ съ квадратомъ fk имѣютъ одну высоту xf, содержатся какъ ихъ основанiя $hx : xk$; но $hx=$ четверти окружности (255), $xk=$ дiаметру xf, слѣдовательно прямоугольникъ hf, то есть площадь круга xfm, къ площади квадрата дiаметра xf, содержится какъ четверть окружности xh къ дiаметру xf: но содержанiе дiаметра къ окружности, архимедово есть 7 : 22, Цейленоново 100 : 314, Мецiево 113 : 355 (255); то по удвоенiи первыхъ двухъ, а послѣднее умножа чрезъ 4, будетъ Архимедово 14 : 44, Цейленоново 200 : 628, Мецiево 452 : 1420, посему четверть окружности xh будетъ имѣть по содержанiю Архимедову 11, Цейленонову 157, а по Мецiеву 355 такихъ частей изъ какихъ состоитъ дiаметръ $xf=xk$, слѣдовательно площадь круга $xfm : \overline{xf}^2$ по содержанiю Архимедову какъ 11 : 14, Цейленонову 157 : 200, Мецiеву 355 : 452.

262. **ЗАДАЧА.** ***По извѣстной площади 8000° круга adbg сыскать дiаметръ ab.***

Рѣшен. Для рѣшенiя сего, по Архимедову содержанiю будетъ 11 : 14 = 8000°: къ площади квадрата дiаметра ab; корень сего квадрата равенъ будетъ дiаметру ab. Или по мецiеву содержанiю 355 : 452 такъ ф.180

площадь

площадь круга содержится къ площади квадрата изъ дїаметра ab (261), и $V\overline{ab}^2 = ab$.

263. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади вырѣзка dcb и углу x^o, сыскать дугу dmb и радїусъ dc.*

Для рѣшенїя сего, сдѣлай слѣдующую пропорцїю какъ градусы $x^o : 360^o =$ площадь сектора dcb къ площади круга $adbg$; потомъ по извѣстной площади круга $adbg$, сыщи дїаметръ ab (262) также и радїусъ cd, наконецъ площадь сектора cdb раздѣля на половину радїуса dc, полчишь дугу dmb.

264. ЗАДАЧА. *Поданнымъ хордѣ db, и перпендикуляру me, которой падаетъ на половину хорды db; сыскать площадь отрѣзка круга $debmd$.*

Рѣшен. Дополни отрѣзокъ dmb въ кругъ (81), продолжи me до g, сдѣлай слѣдующую пропорцїю $me : eb = eb : eg$ (172), $me + eg =$ дїаметру mg, раздѣля оной пополамъ получишь радїусъ $cb = cd = cm$. смѣряй транспортиромъ уголъ сектора dcb; положимъ что будетъ оному 70 град. потомъ поизвѣстному дїаметру gm сыскавъ окружность круга (256), сдѣлай сїю пропорцїю, какъ $360^o : 70^o$ такъ сысканное количество окружности $admbg$ къ дугѣ dmb (13). умножь оную половнною радїуса cb, произведенїе будетъ равно площади сектора (258). изъ cm вычти me, остатокъ будетъ равенъ перпендикуляру ce; и такъ по извѣстной высотѣ ce и основанїю db сыщи площадь треугольника dbc (154), вычти оную изъ площади сектора $dmbc$, получишь площадь отрѣзка $debmd$.

265. ТЕОРЕМА. *Площади подобныхъ фигуръ efk и mnr содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ, то есть* $efk : mnr = \overline{ef}^2 : \overline{mn}^2$.

Доказ. Понеже треугольники фигуры efk, подобны сходственнымъ треугольникамъ фигуры mnr (241); того ради изъ подобныхъ треугольниковъ $efq : mno = \overline{fe}^2 : \overline{mn}^2$ или $\overline{eq}^2 : \overline{mo}^2 = eql : mos = \overline{ql}^2 : \overline{os}^2 = qlk : osr = \overline{qk}^2 : \overline{or}^2 = qki : ort = \overline{qi}^2 : \overline{ot}^2 = qih : otp$ (164), и для равенства содержанiй будетъ $\overline{ef}^2 : \overline{mn}^2 = efq : mno = eql : mos = qlk : osr = qki : ort = qih : otp$; слѣдовательно $efq + eql + qlk + qki + qih : mno + mos + osr + ort + otp = \overline{ef}^2 : \overline{mn}^2$ (ариф. 241); то есть площадь фигуры efk къ площади фигуры $mnr = \overline{ef}^2 : \overline{mn}^2$. ф. 177

Слѣдст. Площади правильныхъ многоугольниковъ одного числа боковъ, содержатся какъ квадраты ихъ боковъ или радiусовъ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $bgc : def = \overline{bc}^2 : \overline{de}^2 = \overline{bg}^2 : \overline{df}^2$ (164); а по умноженiи членовъ перваго содержанiя чрезъ 5, то есть числомъ треугольниковъ составляющихъ плоскость каждаго пятiугольника bck и del, будетъ ($5bgc$) или bkc : ($5def$) или $del = \overline{bc}^2 : \overline{de}^2 = \overline{bg}^2 : \overline{df}^2$ (ариф. 232) ч. д. н. ф. 181

266. ТЕОРЕМА. *Площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радїусовъ или дїаметровъ.*

ф.182 Понеже площадь круга $hfe : \overline{hf}^2 = 11 : 14$,
и 183 также и площадь круга $xfm : \overline{xf}^2 = 11 : 14$ (261); посему $hfe : \overline{hf}^2 = xmf : \overline{xf}^2$ (ариф. 229) или $hfe : xfm = \overline{hf}^2 : \overline{xf}^2 = \overline{ah}^2 : \overline{ex}^2$. Тожъ самое докажется другимъ образомъ; ибо треугольникъ aho равенъ площади круга hfe, также треугольникъ cex равенъ площади круга xfm; но уголъ $h = x$ прямые, при томъ же $ah : xe = oh : cx$ (248); посему треугольники aho и ecx будутъ подобны (105), по сей причинѣ площадь треугольника aho содержится къ площади треугольника cex какъ $\overline{ah}^2 : \overline{ex}^2$ (164); слѣдовательно площадь круга hfe содержится къ площади круга xfm, какъ $\overline{ah}^2 : \overline{ex}^2$ или $\overline{hf}^2 : \overline{xf}^2$.

267. ТЕОРЕМА. *Когда на бокахъ прямоугольнаго треугольника abc начертятся какїя нибудь подобныя между собою фигуры, F, D, E, то фигура F, сдѣланная на дїогоналѣ, будетъ равна суммѣ прочихъ фигуръ D и F, то есть $F = D + E$.*

Доказ.

Доказ. Поелику $\overline{ab}^2 : \overline{ac}^2 = D : E$ (265), и $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 : D + E = \overline{ab}^2 : D$ (ариф. 241) $= \overline{bc}^2 : F$ (265); но $\overline{ab}^2 + \overline{ac}^2 = \overline{bc}^2$, по сему и $D + E = F$.

Примѣч. Такимъ же образомъ докажется, что сумма двухъ круговъ или полукруговъ сдѣланныхъ на перпендикулярахъ ab и ac, равна кругу или полукругу сдѣланному на дiогоналѣ bc.

268. *Определ.* Когда на дiогоналѣ ab, ф. 186. равнобедреннаго прямоугольнаго треугольника abc, опишется полкруга anb и четверть круга $agbc$, то пространство заключающееся между двухъ дугѣ anb и agb, называется *луночка иппократова* (имя изобретателя).

269. ТЕОРЕМА. *Луночка $anbga$, равна прямоугольному равнобедренному треугольнику abc.*

Доказ. Изъ верьха c прямаго угла acb, ф. 186. опусти на ab перпендикуляръ cd, будетъ треугольникъ $bdc = adc$, потому что $bc = ac$ по положенiю, cd общая, и уголъ $cdb = cda$ прямые (30); посему уголъ $dcb = acd$ (32) $= 45° =$ углу cad (53), и $dc = ad$ (55); но $\overline{ad}^2 + (\overline{dc}^2)\ \overline{ad}^2 = \overline{ac}^2 = 2\overline{ad}^2$ (144), по сей причинѣ площадь круга описаннаго радiусомъ ac будетъ вдвое

площади круга описаннаго радїусомъ *ad*; ибо площади круговъ содержатся какъ квадраты радїусовъ, и потому четверть круга *acbg* = половинѣ круга *abn*; а отнявъ отъ оныхъ общїй отрѣзокъ *agbda*, останется луночка *anbg* равна равнобедренному прямоугольному треугольнику *abc*.

270. ТЕОРЕМА. *Площади луночекъ D и G, равны прямоугольному треугольнику abc.*

ф.187 *Доказ.* Понеже полкруга *cabc* = суммѣ полукруговъ *abm* + *bcn* (267); а отнявъ отъ равныхъ количествъ общїе отрѣзки *r* + *e*, останется площадь треугольника *abc* = суммѣ луночекъ *d* + *g*, ч. д. н.

ф.179 271. *Опредѣл.* *Крона или вѣнецъ* есть пространство, между окружностьми двухъ одноцентрныхъ или разноцентрныхъ круговъ заключающееся какъ *A* и *B* значитъ.

272. ТЕОРЕМА. *Площадь круга котораго дїаметръ хорда ef, равна площади кроны B.*

ф.188 *Доказ.* Въ *первомъ случаѣ.* Когда плоскость кроны заключается между двухъ одноцентрныхъ круговъ; то площадь оной равна площади круга, котораго дїаметръ хорда *ef*, касающаяся окружности меньшаго круга: ибо треугольникъ *bde* прямоугольной, и потому $\overline{de}^2 - \overline{bd}^2 = \overline{be}^2$ (144); но площади круговъ содержатся какъ квадраты радїусовъ, слѣдственно площадь круга радїуса *de* безъ пло-

щади

щади круга радiуса db (то есть площадь кроны) равна площади круга, коего радiусъ be или дiаметръ ef.

Въ другомъ случаѣ. Когда плоскость кроны заключается между двухъ такихъ окружностей, которыя взаимно касаются въ точкѣ c: то площадь оной равна кругу котораго дiаметръ хорда ef проходящая перпендикулярно чрезъ половину части ab дiаметра ac. Для доказательства сего, сдѣлай $gd = bc$, и раздѣля оную на двѣ равныя части въ точкѣ m, радiусомъ mg опиши кругъ, котораго окружность будетъ параллельна окружности круга $afce$, и точка m будетъ общiй центръ обоихъ круговъ; потому что $bc = gd$ по положенiю, и bd общая, посему $dc = bg = ag$; но $md = mg$ радiусы, чего ради и $am = mc$, слѣдовательно точка m есть общiй центръ. И такъ по первому случаю площадь круга $afce$ безъ площади круга дiаметра gd или bc, равна площади кроны заключающейся между параллельныхъ окружностей, и равна площади кроны заключающейся между двухъ окружностей касающихся между собою. ф. 189

Въ третьемъ случаѣ. Когда площадь кроны ограничивается окружностьми двухъ разноцентрныхъ круговъ; то площадь оной, равна площади круга коего дiаметръ есть хорда ef, прорѣзывающая дiаметръ ac перпендикурярно въ точкѣ g такъ, что ag равна полсуммѣ линѣй $ab + dc$. Для доказательства сего, сдѣлай $bh = dc$. Раздѣли ah на двѣ равныя части въ точкѣ g, чрезъ которую проведи хорду ef перпендикулярно къ ac, опредѣли $eg = bd$, раздѣли ge на двѣ равныя части въ точкѣ m, радiусомъ mg опиши кругъ, коего окружность будетъ параллельна окружности круга $afce$; потому что $\frac{ab + (bh)\,dc}{2} = ag = gb + bh$ по положенiю: но $ge = db$, be ф. 190

 общая

общая, посему $ed = bg$ (ариф. 34); слѣдственно ($ed + dc$) ec = ($bg + bh$) gh (ариф. 33) = ag; а придавъ къ симъ равныя количества gm и em будетъ ($ec + me$) mc = ($ag + gm$) am, посему точка m есть общїй центръ, и такъ по первому случаю будетъ площадь круга $afce$ безъ площади круга дїаметра ge или bd = площади кроны заключающейся между параллельныхъ окружностей, и равна кронѣ разноцентрныхъ круговъ.

273. ЗАДАЧА. *Извѣстна площадь кроны B одноцентрныхъ круговъ aecf и bg, и части $ab = cg$; сыскать дїаметръ bg меньшаго круга.*

Рѣшен. Понеже площадь кроны B = площади
ф.188 круга коего дїаметръ хорда ef (272); того ради по извѣстной площади круга fep, сыщи дїаметръ ef (262), раздѣли оной пополамъ, частное будетъ = радїусу be, потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю, какъ $ab : be = be : bc$ (172); и наконецъ $bc - cg$ = дїаметру bg.

274. ЗАДАЧА. *Площадь кроны B разноцентрныхъ круговъ касающихся между собою въ точкѣ c и часть ab извѣстны, сыскать дїаметръ bc меньшаго круга.*

Рѣшен. Изъ средины g линѣи ab, поставь пер-
ф.189 пендикуляръ ge, продолжи оной до f, будетъ площадь кроны B = кругу efp коего дїаметръ хорда ef (272). Сыщи по извѣстной площади круга дїаметръ ef (262), раздѣли оной на двѣ равныя части, частное будетъ равно радїусу eg; на послѣдокъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю; $ag : ge = ge : gc$ (172), $gc - gb = bc$.

275. ЗАДАЧА. *Извѣстны, площадь кроны B разноцентрныхъ круговъ, и части*

ab

ab и *cd*; *сыскать дiаметръ bd меньшаго круга.*

Рѣшен. Сдѣлай $bh = dc$, потомъ линѣю ah равную $ab + dc$ раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ g, изъ которой на дiаметрѣ ac поставь перпендикуляръ ge, продолжи оной до f; площадь данной кроны B будетъ равна площади круга epf дiаметра ef (272). По извѣстной площади круга сыщи дiаметръ ef (262), раздѣли оной на двѣ равныя части, частное будетъ равно радiусу ge; наконецъ сдѣлай сiю пропорцiю: $\frac{1}{2}(ab + dc) = ag : ge = ge : gc$ (172); $gc - gh$ ($gb + dc$) $= bd$. ф.190

276. *Опредѣл.* *Элипсисъ* есть пространство на плоскости опредѣленное такого свойства кривою линѣею, что всякая оной точка какъ на примѣръ k, n, q, и проч. опредѣлена перпендикулярно стоящею на оси ab четвертою пропорцiональною линѣею, ik, mn, и проч. сысканною къ большой ab и меньшой оси gh (кои такъ называются) и каждому полупоперешнику iy, mv, pr и проч. круга большой оси ab. ф.191

277. ЗАДАЧА. *По даннымъ двумъ осямъ ab и cd начертить элипсисъ.*

Данную ab раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ x, чрезъ которую проведи gh перпендикулярно къ ab так, чтобъ xh и xg равны были $\frac{1}{2}$ cd, потомъ радiусомъ ax опиши кругъ $acbd$, раздѣли ax въ нѣсколько равныхъ частей въ точкахъ i, m, p, s и проч. поставь перпендикуляры iy, mv, pr, st и проч. потомъ сыскивай къ осямъ ab, gh и къ каждому полупоперешнику круга iy, mv, pr, и проч. четвертыя пропорцiональныя линѣи ik, mn, pq, so и проч. чрезъ точки сихъ линѣй проведи искусно рукою кривую линѣю $hknqoa$; тожъ самое здѣлай и въ прочихъ четвертяхъ круга; про- ф.191

пространство опредѣленное сею кривою линѣею *ahbga* будетъ элипсисъ (276).

Примѣч. Хотя въ предъидущей задачѣ и показано, какимъ образомъ по даннымъ двумъ осямъ чертить элипсисъ, но въ практикѣ съ точною вѣрностїю сего учинить не можно; ибо ежелибъ радїусъ *ax* раздѣленъ былъ и въ безчисленное число частей, отъ чегобъ произойти могло безчисленное число полупоперешниковъ круга; слѣдовательно такоежъ количество принуждено бъ было къ большей и меньшей осямъ и къ каждому полупоперешнику круга, сыскивать четвертыхъ пропорцїональныхъ линѣй; притомъ же и того утвердить не можно, чтобъ при искании оныхъ линѣй не могло произойтить какой либо хотя малѣйшей ошибки: да естьлиеъ оное и съ самою вѣрностїю учинено было; то чрезъ точки опредѣляемыхъ полупоперешниковъ элипсиса, едваль можно будетъ провесть рукою исправно кривую линѣю; и такъ для избѣжанїя сей трудности предлагается здѣсь практической способъ, посредствомъ котораго легчайшимъ образомъ, и съ точною вѣрностїю, начертить можно желаемой элипсисъ слѣдующимъ образомъ:

Данную большую ось *ab* раздѣли на двѣ равныя части въ точкѣ *x*, чрезъ которую проведи *gh* перпендикулярно къ *ab* такъ, чтобъ *xh* и *xg* равны
ф.192 были половинѣ меньшей оси *cd*. Отъ точки *a* опредѣли $ad = xg$ или $= \frac{1}{2}\, gh$, остатокъ *dx* раздѣли на 8 равныхъ частей, сдѣлай линѣю $dm = \frac{3}{8}\, dx$. Радїусомъ *am* опиши кругъ; положи $bc = am$, изъ точки *c* радїусомъ *bc* опиши кругъ, на линѣе *mc* начерти равносторонные треугольники *mec* и *mfc*, продолжи *ec* и *em*, также *fc* и *fm* пока пересѣкутся съ окружностьми круговъ въ точкахъ *n*, *k*, *r* и *q*; напослѣдокъ изъ точки *e* радїусомъ *ek* опиши дугу *kkn*, а изъ точки *f* радїусомъ *fq* дугу *qgr*; которыя

торыя пройдя чрезъ концы меньшей оси gh и коснувшись круговъ въ точкахъ k, n, q и r (89), опредѣлятъ элипсисъ $aqgrbnhk$.

Справедливость сего доказана будетъ въ криволинѣйной геометрїи.

278. ТЕОРЕМА. *Площадь круга $acbd$ изъ большой оси ab, къ площади элипсиса $ahbg$ содержится какъ большая ось ab къ меньшей gh.*

Доказ. Понеже $ab : gh = (\frac{1}{2}ab)cx : (\frac{1}{2}gh)xh = iy : ik = mv : mn = pr : pq = st : so$ (277), посему ф.191 $cx + iy + mv + pr + st : xh + ik + mn + pq + so = ab : gh$ (ариф. 241): но предъидущей членъ перваго содержанїя ничто иное какъ сумма полупоперешниковъ составляющихъ четверть круга $acbd$, а послѣдующей сумма полупоперешниковъ составляющихъ четверть элипсиса $ahbg$, слѣдовательно $(cx + iy + mv + pr + st) \times 4 : (xh + ik + mn + pq + so) \times 4 = ab : gh$ (ариф. 232), то есть площадь круга $acbd$ къ площади элипсиса $agbh$ содержится какъ $ab : gh$.

279. ТЕОРЕМА. *Площадь элипсиса $adbc$, равна площади круга котораго дїаметръ bf средняя пропорцїональная между меньшою $cd = bg$ и большою осью ab.*

Доказ. Положимъ что площадь элипсиса $= p$, площадь круга изъ большой оси $ab = q$, площадь ф.193 круга изъ средней $bf = m$; то будетъ $q : p = ab : (cd)\, bg$ (278), и притомъ $\overline{ab}^2 : \overline{bf}^2 = ab : bg$ (181); по сему $q : p = \overline{ab}^2 : \overline{bf}^2 = q : m$ (26); чего ради $q : p = q : m$ (ариф. 229): но $q = q$, слѣдовательно $p = m$, то есть площадь элипсиса $acbd$ равна площади круга коего дїаметръ bf.

280. ЗАДАЧА. *Большая ab и меньшая ось cd извѣстны; сыскать площадь элипсиса adbc.*

ф. 193. *Рѣшен.* На продолженной ab сдѣлай bg = cd, потомъ раздѣля ag на двѣ равныя части опиши полкруга afg. Изъ точки b поставь перпендикуляръ bf, раздѣля оной пополамъ, опиши кругъ. По извѣстной ab и cd = bg сыщи bf (174), напослѣдокъ по дїаметру bf сыщи площадь круга brf (256), которая будетъ равна площади элипсиса adbc (279). Или сыскавъ площадь круга большей оси ab (256), сдѣлай слѣдующую пропорцїю, какъ большая ось ab содержится къ меньшей cd, такъ площадь круга большей оси ab, будетъ содержатся къ площади элипсиса adbc.

281. ЗАДАЧА. *Площадь элипсиса acbd и меньшая ось cd извѣстны, сыскать большую ось ab.*

Рѣшен. Поелику площадь элипсиса acbd, равна площади круга дїаметра bf (279): то по извѣстной площади онаго сыскавши дїаметръ bf (262), сдѣлай слѣдующую пропорцїю; какъ меньшая ось cd или bg содержится къ дїаметру bf, такъ оной же дїаметръ bf къ большой оси ab.

282. ЗАДАЧА. *По извѣстной площади элипсиса acbd и содержанїю большой оси ab къ меньшой cd, какъ 9 : 5, сыскать оныя порознь.*

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцїю, какъ 5 : 9, такъ площадь элипсиса acbd будетъ содержаться къ площади круга изъ большой оси ab (278); потомъ зная площадь круга anbh, сыщи онаго дїаметръ ab (262): напослѣдокъ сдѣлай сїю пропорцїю, 9 : 5 = ab : къ меньшой оси cd.

О ПРЕ-

О ПРЕВРАЩЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ ИЗЪ ОДНОЙ ФИГУРЫ ВЪ ДРУГУЮ.

283. *Опредѣл.* Превратить плоскую фигуру въ другую разумѣется начертить фигуру, которая бы плоскостію была равна данной, а наружностію и другими свойствами была желаемая.

284. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, превратить въ равнобедренный agb.*

Рѣшен. Раздѣля основаніе *ab* въ точкѣ *d* пополамъ (39), поставь перпендикуляръ *dg* (40), изъ точки *c* протяни *cg* параллельно *ab* (52), точки *a*, *g* и *b* соедини прямыми линѣями *ag* и *bg*, будетъ треугольникъ *agb* желаемый. No 8 ф. 194.

Доказат. Смотри въ (§ 129).

285. ЗАДАЧА. *Данной параллелограмъ ac, превратить въ треугольникъ ade.*

Рѣшен. По продолженіи *ab*, здѣлай *be* = *cd*, проведи *de*, получишь треугольникъ *ade* желаемой. ф. 195

Доказ. Смотри въ (§131).

286. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ прямоугольникъ ae по основанію ac.*

Рѣшен. Изъ верьха *b* на основаніе *ac* опусти перпендикуляръ *bd* (41), также ф. 196

изъ a и c поставь перпендикуляры ag и ce (58), наконецъ раздѣля высоту bd въ f пополамъ, протяни eg въ параллель основанiю ac, будетъ прямоугольникъ $agec$ желаемой.

Доказ. Справедливость сего видна въ (§130).

287. ЗАДАЧА. *Всякой данной треугольникъ abc превратить въ параллелограмъ ae по углу cab.*

Рѣшен. Бокъ ac, раздѣли въ d попо-
ф.197 ламъ (39), изъ точекъ d и b протяни линѣи de и be параллельно ab и ac (52), будетъ параллелограмъ ae желаемой.

Доказ. Понеже $ad = dc$ по рѣшенiю, и равна be (50), посему $be = dc$, уголъ $feb = fdc$ и уголъ $fbe = fcd$ (48), чего ради треугольникъ $bef = dfc$ (31), а придавъ къ симъ общей четвеpосторонникъ $adfb$, будетъ треугольникъ abc = параллелограму $adeb$.

288. ЗАДАЧА. *Всякой четверосторонникъ $abcd$, превратить въ треугольникъ abe.*

Рѣшен. Протяни bd, изъ точки c про-
ф.198 веди ce параллельно bd пока пересѣчется съ продолженною ad въ точкѣ e, наконецъ точки b и e соединя прямою линѣею be, будетъ треугольникъ abe желаемой.

Доказ.

Доказ. Понеже треугольникъ $bcd = bed$, поелику имѣютъ одно основанїе bd и между параллельныхъ линѣй bd и ce (129); а придавъ къ онымъ треугольникъ abd, будетъ треугольникъ abe = четвероспороннику $abcd$ (ариф. 33).

289. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ другой afe по данной высотѣ cd.*

Рѣшен. Изъ точки d проведи df параллельно основанїю ac, которая пересѣчется съ продолженною ab въ точкѣ f, протяни fc; потомъ проведи be параллельно fc, наконецъ точки e и f соедини прямою линѣею ef, получишь, треугольникъ afe желаемой. ф. 199.

Доказ. Треугольникъ $bef = bec$ имѣющїе одно основанїе be и между параллельныхъ линѣй be и cf (129); а придавъ къ симъ треугольникъ abe, будетъ ($abe + bef$) aef = ($abe + bec$) abc, ч. д. н.

Примѣч. Когда высота cd будетъ меньше высоты даннаго треугольника abc: то изъ точки d проведи df параллельно основанїю ac, изъ b линѣю be параллельно af. Точки e и f соединя прямою линѣею ef, получишь треугольникъ cfe желаемой. Ибо треугольникъ $afe = afb$ (129), посему ($afe + afc$) cfe = ($abf + afc$) abc (ариф. 33). ф. 200.

290. ЗАДАЧА. *Данной треугольникъ abc превратить въ другой по данной высотѣ cd и углу x.*

Рѣшен.

Рѣшен. Сперва данной треугольникъ
ф. 201 *abc* преврати въ другой *ecg* (289), потомъ сдѣлай уголъ *ecf* = данному *x*, изъ точки *f* гдѣ бокъ *cf* съ продолженною *dg* пересѣчется, протяни линѣю *ef*, будетъ треугольникъ *cfe* желаемой.

Доказ. Понеже треугольникъ *abc* = треугольнику *egc* по предъидущей задачѣ, но треугольникъ *egc* = треугольнику *ecf* (129), слѣдовательно треугольникъ *abc* = Δ*ecf*.

291. ЗАДАЧА. ***Треугольникъ abc, превратить въ другой по данному основанїю ad.***

ф. 202. *Рѣшен.* Протяни изъ *c* линѣю *cg* въ параллель *db*, а изъ *d* въ *g*, будетъ треугольникъ *agd* желаемой.

Доказ. Треугольникъ *bdg* = *bdc* (129). Къ симъ треугольникамъ придай общїй треугольникъ *abd*, будетъ треугольникъ *agd* = *abc* (ариф. 33).

ф. 203. *Примѣч.* Когда данное основанїе *ad* будетъ больше основанїя *ac* треугольника *abc*, то превращается оной такимъ же образомъ какъ сказано, и треугольникъ *abc* будетъ = *agd*. Ибо треугольникъ *cgb* = *cgd* (129); а придавъ къ симъ треугольникамъ общїй треугольникъ *acg*, будетъ треугольникъ *abc* = *agd*.

292.

292. ЗАДАЧА. *Прямоугольникъ ac, превратить въ другой по данной высотѣ be.*

Рѣшен. Протяни линѣю *ech* пока пересѣчется съ продолженною *ad* въ *h*, на продолженной *cb* сдѣлай *bf* = *dh*, изъ точекъ *f* и *e* проведи *fg* параллельно *be*, и *eg* параллельно *bf*; будетъ прямоугольникъ *bg* желаемой. Ф. 204.

Доказ. Треугольникъ *bec* подобенъ треугольнику *dch*; ибо уголъ *ebc* = *cdh* прямые, уголъ *bce* = *dhc* и уголъ *bec* = *dch* (53), посему *be* : *cd* = *bc* : (*dh*) *bf* (104), причемъ *be* × *bf* = *bc* × *cd*, то есть прямоугольникъ *ac* = *bg* (133).

293. ЗАДАЧА. *Параллелограмъ abcd превратить въ другой по данному основанїю dh.*

Рѣшен. Протяни линѣю *hce* пока пересѣчется съ продолженною *ab* въ *e*, изъ *e* на *bc* опусти перпендикуляръ *ei*, изъ *h* на линѣе *dh* поставь перпендикуляръ *hp* = *ei*, проведи *hf* параллельно продолженной *cd*, и *pg* въ параллель *hd*, получишь параллелограмъ *gh* равенъ данному *bd*. Ф. 205.

Доказ. Треугольникъ *cdh* подобенъ *cbe* ибо уголъ *dhc* = *bce*, уголъ *dch* = *bec* (48), посему уголъ *cdh* = *ebc* (53); и для подобїя оныхъ (*dh*) *gf* : (*bc*) *ad* = *ck* : (*ei*) *hp* (104); при чемъ

gf

$gf \times hp = ad \times ck$; то есть параллелограмъ $dhfg$ = параллелограму $abcd$ (133).

Примѣч. Такимъ же образомъ и прямоугольникъ превращается въ другой поданному основанїю.

294. ЗАДАЧА. *Параллелограмъ ab, превратить въ квадратъ bh.*

ф. 206. *Рѣшен.* На продолженной cb сдѣлай bf = высотѣ be параллелограма ab, опиши на cf полкруга cgf, поставь изъ b перпендикуляръ bg; сдѣлай квадратъ $bghi$ (69), которой будетъ = параллелограму ab.

Доказ. Понеже прямоугольникъ ec = квадрату bh (172); но прямоугольникъ ce = параллелограму ab (129), слѣдовательно и квадратъ bh равенъ параллелограму ab.

295. ЗАДАЧА. Квадратъ *ad*, *превратить въ прямоугольникъ fh, котораго бы основанїе съ высотою вообще равны были данной линѣе bc.*

ф. 207. *Рѣшен.* Данную bc раздѣля пополамъ опиши полкруга bgc, продолжи ed до g, проведи gf параллельно db, на fc сдѣлай прямоугольникъ fh, коегобъ высота fk была равна bf (70), будетъ прямоугольникъ fh желаемой.

Доказ. Прямоугольникъ $fh = \overline{gf}^2$ (172) $= \overline{bd}^2$; но $bf = fk$, слѣдовательно $fk + fc$ = данной bc.

296. ЗАДАЧА *треугольникъ abc, превратить въ другой ade, чтобы верьхъ онаго лежалъ въ данной точкѣ e, (которая внѣ треугольника) а основанїе въ линѣе ac.*

Рѣшен. Протяни изъ e въ a линѣю ae, изъ b линѣею bf параллелчну ac, изъ f линѣю fd параллельну ec; наконецъ проведи линѣю ed, треугольникъ ade будетъ = данному abc. ф. 208.

Доказ. Треугольникъ dfe = треугольнику dfc (129), къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ afd, будетъ треугольникъ (dfe + afd)ade = треугольнику (afd + dfc)afc : но треугольникъ afc = треугольнику abc (129), слѣдовательно abc = ade.

297. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой, чтобъ верьхъ онаго лежалъ въ точкѣ d, (которая внутри треугольника) а основанїе въ прямой линѣе съ ac.*

Рѣшен. Протяни въ d линѣи ad и dc, продолжи ac въ обѣ стороны, проведи изъ b линѣю be параллельну ad, bf въ паралелель dc, наконецъ проведи de и df, будетъ треугольникъ edf желаемой. ф. 209.

Доказ. Треугольникъ adb = треугольнику ade, и треугольникъ cdb = треуголь-

угольнику cdf (129), къ симъ треугольникамъ придай adc, будетъ ($adb + cdb + adc$) $abc =$ треугольнику ($ade + cdf + adc$) edf (ариф. 33).

298. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc превратить въ другой по даному боку cd и углу acd.*

Рѣшен. Протяни bg въ параллель ac,
ф. 210 точки a и g соедини прямою линѣею ag, потомъ треугольникъ agc преврати въ другой по основанiю cd (291), будетъ треугольникъ cde желаемой.

Доказ. Понеже данной треугольникъ $abc = agc$ (129), а сей равенъ треугольнику edc, слѣдовательно треугольникъ $edc =$ треугольнику abc.

299. ЗАДАЧА. *Сыскать содержанiе двухъ подобныхъ фигуръ A и B.*

Рѣшен. Къ сходственнымъ бокамъ ab,
ф. 211. и ac сыщи третью пропорцiональную линѣю ce (107). Будетъ $A : B = ab$: къ третiи пропорцiональной ce; то есть фигура A содержится въ подобной фигурѣ B столько разъ, сколько бокъ ab въ третiй пропорцiональной ce.

Доказ. Понеже $ab : ac = (bd) ac : ce$ по рѣшенiю, при чемъ $\overline{ab}^2 : \overline{ac}^2 = ab : ce$ (181),

(181), но $A : B = \overline{ab}^2 : \overline{ac}^2$ (265), посему и $A : B = ab : ce$.

Слѣдст. Изъ того видно, что площадь всякой фигуры содержится къ площади другой подобной фигуры, какъ бокъ ab первой, къ третїй пропорцїональной линѣе ce, сысканной къ боку первой и сходственному боку ac второй фигуры

300. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ равенъ данному acb, и что бы одинъ его бокъ былъ параллеленъ данной линѣе de.*

Рѣшен. Протяни cf въ параллель данной de, опиши на ab полкруга, сыщи ф.
среднюю пропорцїональную линѣю ah меж- 212.
af и ab (172); и протяни изъ h линѣю hi въ пареллель de, будетъ треугольникъ aih желаемой.

Доказ. Треугольникъ $acf : acb = af : ab$ одной высоты cp (139), а изъ подобныхъ по рѣшенїю треугольниковъ $acf : aih = af : ab$ (299); посему $acf : acb = acf : aih$; но $acf = acf$, слѣдовательно и $acb = aih$.

301. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ равенъ данному abc, а треугольнику P подобенъ.*

ф. 213. *Рѣшен.* На основанїи ac сдѣлай треугольникъ acf, котораго бы углы при основанїи равны были угламъ x и y треугольника P (59); протяни bg въ параллель ac, сыщи среднюю пропорцїональную ce между cf и cg (172), сдѣлай $ch = ce$; протяни hd въ параллель af, треугольникъ cdh будетъ желаемой.

Доказ. Треугольникъ cdh подобенъ cfa и подобенъ данному P порѣшенїю. Треугольникъ $acf : acg = cf : cg$ одной высоты ai (139), а изъ подобныхъ треугольниковъ $acf : cdh = cf : cg$ (299), посему $acf : acg = acf : cdh$; но $acf = acf$, по сей причинѣ и $acg = cdh$; треугольникъ же acg = данному acb (129), слѣдовательно треугольникъ $cdh = abc$ и подобенъ данному P.

302. ЗАДАЧА. *Данную линѣю ab, раздѣлить на двѣ части такъ, чтобъ одна часть была средняя пропорцїональная между другою частїю и данною линѣею cd.*

ф. 214. *Рѣшен.* Данную ab продолжи до c такъ, что бы bc равна была другой данной cd, опиши на ac половину круга acd, изъ b поставь перпендикуляръ bd, раздѣли bc въ f на двѣ равныя части. Изъ f радїусомъ fd опиши дугу de, будетъ eb средняя пропорцїональная между частїю ae и данною линѣею bc или cd.

Доказ. Изъ f радїусомъ fb опиши полкруга bhc протяни eh, при чемъ будетъ треугольникъ $bdf = hef$. Ибо уголъ efd общїй, линѣя $hf = bf$, и $fe = df$ радїусы, посему $bd = he$ и уголъ $dbf = ehf$ прямые (30). Будетъ $\overline{bd}^2 = (ae + eb) \times bc = ae \times bc + eb \times bc$ (172), также $\overline{eh}^2 = (eb + bc) \times eb = eb \times eb + bc \times eb$ (185), но $\overline{bd}^2 = \overline{he}^2$ по рѣшенїю; посему $ae \times bc + eb \times bc = eb \times eb + bc \times eb$; а отнявъ отъ сихъ величину $bc \times eb$, останется $ae \times bc = eb \times eb = \overline{eb}^2$ (ариф. 34); слѣдовательно eb средняя пропорцїональная между ae и bc.

303. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, не перемѣняя угла bci, превратить въ другой mci, чтобъ одинъ его бокъ mi былъ въ прямой линѣе съ данною точкою d.*

Рѣшен. Продолжи основанїе bc въ обѣ стороны, изъ d на bc опусти перпендикуляръ de, сдѣлай $ef = de$, протяни fg въ параллель bc. Данной треугольникъ abc преврати въ другой cgk по высотѣ ef (289), протяни dh въ параллель ac, сдѣлай $cl =$ основанїю ck превращеннаго треугольника cgk. Линѣю hc раздѣли на двѣ части такъ, чтобъ одна часть cm была средняя пропорцїональная, между другую частїю hm, и линѣею cl или ck (302). Изъ d чрезъ ф. 215

точку *m*, протяни линѣю *dmi* пока пересѣчется съ продолженнымъ бокомъ *ca* въ точкѣ *i*; будетъ треугольникъ *mci* равенъ данному *abc*.

Доказ. Высота *de* треугольника *mdh*, равна высотѣ *ef* треугольника *kgc*, также *hm* : *mc* = *mc* : (*kc*)*cl* по рѣшенїю, и треугольникъ *mic* подобенъ треугольнику *mdh*; ибо уголъ *mic*=*mdh*, уголъ *icm* = *mhd* (48), и уголъ *imc* = *hmd* (20); того ради треугольникъ *hdm* : *mic* = *hm* : (*kc*)*cl* (299), треугольникъ же *hdm* : (*kgc*)*abc*=*hm* : (*kc*)*cl* (139), посему *hdm* : *abc* = *hdm* : *mic* (ариф. 229); но *hdm* = *hdm*, слѣдовательно *abc* = *mic*.

304. ЗАДАЧА. *Всякой четвероронникъ abcd превратить въ прямоугольникъ gd.*

No 9. ф. 216 *Рѣшен.* Протяни *bf* въ параллель *ac*, точки *c* и *f* соедини прямою линѣею *cf*, треугольникъ *dcf* преврати въ прямоугольникъ *gd* (286), которой будетъ = четверосторонннику *abcd*.

Доказ. Треугольникъ *afc* = *abc*, имѣющїе одно основанїе *ac* и между параллельныхъ линѣй *ac* и *bf*, къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ *acd* будетъ треугольникъ (*acf* + *acd*) *dcf* = *abc* + *acd* = четверосторонннику *abcd*; но треугольникъ *dcf* = прямоугольнику *gd* (286); слѣдовательно прямоугольникъ *gd* = четверосторонннику *abcd*.

305.

305. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd превратить въ треугольникъ efg, коего бы верьхъ находился въ данной точкѣ e.*

Рѣшен. Протяни изъ *b* линѣю *bf* параллельну *ae*, изъ *c* линѣю *cg* параллельну *ed*; наконецъ протяни *ef* и *eg*, треугольникъ *feg* будетъ желаемой. ф. 217

Доказ. Треугольникъ *aef* = *aeb*, а треугольникъ *edg* = *edc*, къ симъ равнымъ треугольникамъ придай треугольникъ *aed*, будетъ (*aef* + *edg* + *aed*) *feg* = *aeb* + *edc* + *aed* = четверосторонnику *abcd*.

306. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd превратить въ трапецїю aefd.*

Рѣшен. Продолжи бока *ab* и *cd*, пока пересѣкутся въ точкѣ *k*, треугольникъ *kbc* преврати въ другой *kef*, котораго бы бокъ *ef* былъ параллеленъ *ad* (300), будетъ трапецїя *aefd* = четверосторонnику *abcd*. ф. 218

Доказ. Треугольникъ *kbc* = *ekf* по рѣшенїю (300); отъ коихъ отними общую фигуру *kepc*, останется треугольникъ *ebp* = *pcf*, а придавъ къ симъ треугольникамъ фигуру *abpfd*, будетъ (*ebp* + *abpfd*) *aefd* = (*pcf* + *abpfd*) *abcd*, ч. д. н.

307. ЗАДАЧА. *Пятїугольникъ abcde, превратить въ треугольникъ fcg.*

ф.219 *Рѣшен.* Протяни изъ b линѣю bf параллельну ac, изъ d линѣю dg параллельну ce; потомъ протяни cf и cg, будешъ треугольникъ fcg равенъ пятiугольнику $abcde$.

Доказ. Треугольникъ $acf = acb$, и треугольникъ $ecg = ced$ (129), а придавъ къ онымъ треугольникъ ace, будетъ ($acf + ecg + ace$) $fcg = abc + ced + aec$ = пятiугольнику $abcde$.

308. ЗАДАЧА, *Пятiугольникъ abcde превратить въ треугольникъ по сторонѣ ab и углу eab.*

ф. 220. *Рѣшен.* Изъ d протяни dg параллельно ce, изъ c линѣю cf параллельну bg, проведи bf, треугольникъ abf будетъ желаемой.

Доказ. Треугольникъ $gce = edc$ (129), къ симъ треугольникамъ придай четверосторонникъ $abce$, будетъ четверосторонникъ $abcg$ = пятiугольнику $abcde$; также треугольникъ gbc = треугольнику gbf (129), а придавъ къ онымъ треугольникъ abg, будетъ четверосторонникъ $abcg$ = треугольнику abf: но $abcg$ = пятiугольнику $abcde$, слѣдовательно и треугольникъ abf = пятiугольнику $abcde$.

309. ЗАДАЧА. *Данной пятiугольникъ abcde, превратить въ другой ahide, чтобъ одинъ его бокъ hi былъ параллеленъ линѣе dg.*

Рѣшен.

Рѣшен. Продолжи бока *ab* и *dc* пока пересѣкутся въ *k*. Треугольникъ *bck* преврати въ другой *hik*, котораго бы бокъ *hi* былъ параллеленъ линѣе *dg* (300); будетъ пятїугольникъ *ahide* равенъ данному пятїугольнику *abcde*. ф. 221

Доказ. Треугольникъ *bck* = *hik* по рѣшенїю (300), отъ коихъ отнявъ общїй четвеространникъ *khpc*, будетъ треугольникъ *ipc* = *bph*, придай къ симъ фигуру *abpide*; будетъ пятїугольникъ *abcde* = пятїугольнику *ahide*.

310. ЗАДАЧА. *Шестїугольникъ abcdef, превратить въ треугольникъ bcg по сторонѣ bc и углу abc.*

Рѣшен. Продолжи *fe*, *af* и *ba*, протяни *dk* въ параллель *ec*, *kh* въ параллель *fc*, *hg* въ параллель *ca*; наконецъ проведи *cg*, будетъ треугольникъ *gcb* = данной фигурѣ *abcdef*. ф. 222.

Доказ. Треугольникъ *cek* = *cde* (129); придай къ каждому фигуру *bcefa*, будетъ фигура *cbafk* = *abcdef*. Треугольникъ *ckf* = *cfh* (129), а придавъ къ каждому фигуру *abcf*, будетъ фигура *abckf* = четвеространнику *abch*; также треугольникъ *acg* = *ach* (129), придай къ каждому изъ сихъ треугольникъ *abc*, будетъ треугольникъ *bgc* = *abch*; но *abch* = *abckf* = *abcdef*; слѣдовательно треугольникъ *bgc* = шестїугольнику *abcdef*.

311. ЗАДАЧА. *Превратить пятiугольникъ adc, въ треугольникъ, котораго бы верьхъ лежалъ въ точкѣ о, а основанiе проходя чрезъ точку а было параллельно боку cd.*

ф. 223. **Рѣшен.** Чрезъ точку *a* протяни линѣю *gi* въ параллель *cd*, *bf* въ параллель *ac*, *eh* въ параллель *ad*, и линѣи *dh* и *cf*. Превրати трапецiю *fcdh* въ треугольникъ *goi* (305) получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ *afc* = *acb*, и треугольникъ *adh* = *aed* (129), къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ *cad* будетъ (*afc* + *acd* + *adh*) *fcdh* = (*acb* + *acd* + *aed*) *abcde*; но четвеpосторонникъ *fcdh* = треугольнику *goi* по рѣшенiю (305), слѣдовательно треугольникъ *goi* = пятiугольнику *abcde*.

312. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ abcdef, превратить по углу abc и боку bc въ треугольникъ.*

ф. 224. **Рѣшен.** Протяни *fg* параллельно *ae*, проведи *eg*, пятiугольникъ *bcedg* преврати въ треугольникъ *bch* (308), получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ *afg* = *fge* (129), а придавъ къ онымъ фигуру *fgbcde*, будетъ многоугольниикъ *abcdef* = пятiугольнику *gbcde* (ариф. 33), который = тре-

треугольнику *bch* по рѣшенію (308), слѣдовательно данной многоугольникъ *abcdef* = треугольнику *bch*.

313. ЗАДАЧА. *Данной многоугольникъ abcde, превратить въ треугольникъ fgh, коего бы верьхъ лежалъ въ точкѣ g (которая внутри фигуры) а основаніе въ прямой линѣе съ основаніемъ ae.*

Рѣшен. и Доказ. Многоугольникъ *abcde* превратi въ треугольникъ *ick* (307), а сей треугольникъ *ick*, преврати въ другой *fgh* коего бы верьхъ лежалъ въ точкѣ *g* (297), получишь желаемое. ф. 225.

Примѣч. Когда точка *g* будетъ внѣ фигуры, то сперва данную фигуру преврати въ треугольникъ (307), а потомъ сей треугольникъ преврати въ другой, чтобы верьхъ онаго лежалъ въ данной точкѣ *g* (296).

314. ЗАДАЧА. *Неравносторонной треугольникъ abc превратить въ равносторонной afg.*

Рѣшен. На линѣе *ab* сдѣлай равносторонной треугольникъ *abe*, продолжи *ae* до *d*, протяни *cd* въ параллель *ab*, на *ed* опиши полкруга. Изъ *a* поставь перпендикуляръ *af*, сдѣлай равносторонной треугольникъ *afg*; которой будетъ равенъ данному *abc*. ф. 226.

Доказ. Треугольникъ *aeb* : *abd* = *ae* : *ad* имѣющіе одну высоту *bh* (139); тре-

угольникъ же $aeb : afg = ae : ad$ (299), посему $aeb : abd = aeb : afg$; но $aeb = aeb$, слѣдовательно $afg = abd = abc$ (129).

Примѣч. Такимъ образомъ всякую фигуру превратя прежде въ какой нибудь треугольникъ, можно превратить въ равносторонной треугольникъ.

315. ЗАДАЧА. *Треугольникъ* abc *превратить въ какой нибудь правильной многоугольникъ; на прим. въ пятiугольникъ* $blkih$.

Рѣшен. Начерти произвольной величины правильной многоугольникъ, подобной требуемому какъ здѣсь noq (214), а на линѣе ab треугольникъ abd подобенъ nop (59), что бы онаго уголъ d былъ $= npo$; продолжи db до e, протяни ce въ параллель ab и линѣю ae; раздѣли eb во столько равныхъ частей сколько требуемой многоугольникъ боковъ имѣетъ, какъ 1, 2, 3, 4 и 5 частей; между bd и частiю $b1$ сыщи среднюю пропорцiональную линѣю bg (173); изъ точки g радiусомъ bg опиши кругъ $bhikl$, въ которомъ начерти правильной многоугольникъ $hiklb$ требуемаго числа боковъ, получишь желаемое.

ф. 227.

Доказ, Треугольникъ $abd : ab1 = db : b1$ имѣющiе одну высоту as (139), также треугольникъ $abd : bgh = db : b1$ (299); чего ради $abd : ab1 = abd : bgh$; но $abd = abd$, слѣдовательно $ab1 = bgh$; треугольникъ

никъ же *abi* = *bgh* = пятой части треугольника *abe* или *abc* (129), и равенъ также пятой части правильнаго пятїугольника *bhikl* (199); слѣдовательно треугольникъ *abc* = пятїугольнику *bhikl*.

Примѣч. Такимъ образомъ всякую плоскую фигуру превратя сперва посредствомъ предъидущихъ задачь въ треугольникъ; можно превратить въ желаемой правильной многоугольникъ.

316. ЗАДАЧА. *Всякой неправильной многоугольникъ превратить въ квадратъ: на прим. пятїугольникъ abcde.*

Рѣшен и Доказ. Сперва данную фигуру *abcde* преврати въ треугольникъ *bcg* (308); а сей треугольникъ преврати въ прямоугольникъ *gq* (286), наконецъ прямоугольникъ *gq* превратя въ квадратъ *bl* (294), получишь желаемое. Ф. 228.

317. ЗАДАЧА. *Начертить фигуру amnop подобну abcde, а равну данной B.*

Рѣшен. Каждую изъ данныхъ фигуръ *B* также и *abcde*, преврати въ квадратъ *fh* и *ak* (316); на бокѣ квадрата *al* сдѣлай *ah* = боку *ah* квадрата *fh* равнаго данной фигурѣ *B*; изъ точки *h* протяни линѣю *hm* параллельно *lb*, проведя *ac* и *ad*, протяни линѣю *mn* параллельно *bc*, *on* параллельно *dc*, и *op* параллельно *ed*, при чемъ будетъ фигура *amnop* равна данной *B* и подобна *abcde*. Ф. 229.

Доказ.

Доказ. Понеже треугольникъ *abl* подобенъ треугольнику *ahm*; того ради $al : ah = ab : am$ (104), и $\overline{al}^2 : \overline{ah}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{am}^2$ (ариф. 245): а фигура $abcde : amnop = \overline{ab}^2 : \overline{am}^2$ (265), посему $abcde : amnop = \overline{al}^2 : \overline{ah}^2$; но $\overline{al}^2 =$ фигурѣ *abcde* по рѣшенію, слѣдовательно $amnop = \overline{ah}^2 =$ фигурѣ *B*.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая фигура въ правильной, или въ подобной неправильной многоугольникъ превращается.

318. ЗАДАЧА. *Данной кругъ bh превратить въ квадратъ eg.*

Рѣшен. и Доказ. Протяни радіусъ *ab*,
ф. на концѣ котораго поставъ перпендикуляръ
230. *bc*. раздѣли діаметръ *bh* на 113 равныхъ частей, сдѣлай $bc = 355$ такимъ же частямъ; протяни изъ *c* въ центръ *a* линѣю *ac*, будетъ треугольникъ $abc =$ данному кругу *bh* (255), потомъ треугольникъ *abc* преврати въ прямоугольникъ *be*. Наконецъ прямоугольникъ *be* преврати въ квадратъ *eg* (294), которой будетъ равенъ данному кругу *bh*.

319. ЗАДАЧА. *Квадратъ ab превратить въ кругъ.*

No10 *Рѣшен.* Раздѣли бокъ квадрата *bc* на
ф. 231 одиннатцать равныхъ частей, продолжи

cb

cb до d такъ, что бы bd была равна четырнацати такимъ же частямъ; опиши на cd половину круга cde, изъ b поставь перпендикуляръ be, опиши кругъ eb, который будетъ равенъ данному квадрату ab.

Доказ. Понеже $\overline{cb}^2 : \overline{be}^2 = cb : bd$ (181) или 11 : 14 по рѣшенїю, также и площадь круга $beg : \overline{be}^2 = 11 : 14$ (261), посему $\overline{cb}^2 : \overline{be}^2 = beg : \overline{be}^2$ (ариф. 218); но $\overline{be}^2 = \overline{be}^2$ слѣдовательно кругъ $beg = \overline{cb}^2$.

Примѣч. Сїе превращенїе квадрата въ кругъ, разсуждается по пропорцїи дїаметра къ окружности 7 : 22, которую изобрелъ Архимедъ: а понеже Мецїево содержанїе дїаметра къ окружности какъ 113 къ 355, ближе къ точности нежели 7 къ 22; того ради для вернѣйшаго превращенїя квадрата въ кругъ, надлежитъ бокъ онаго раздѣля на 355 равныхъ частей, искать среднюю пропорцїональную линѣю между 355 и 452, и взявъ оную за дїаметръ сдѣлать кругъ, которой равенствомъ квадрату будетъ ближе перваго (255. примѣч.).

320. ЗАДАЧА. *Кругъ abc превратить въ полкруга.*

Рѣшен. Поставь изъ центра d на дїаметрѣ ab перпендикуляръ dc, протяни bc, продолжа оную до e, радїусомъ bc опиши полкруга cef, получишь желаемое. Ф. 232.

Доказ. Понеже $db = dc$ и $\overline{db}^2 + \overline{(cd)}^2 \overline{db}^2 = \overline{bc}^2 = 2\overline{db}^2$ (144), того ради $\overline{bc}^2$ вдвое больше

больше $\overline{bd}^2$, но площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радїусовъ, посему площадь кругу радїуса *bc* вдвое площади круга коего радїусъ *bd*, слѣдовательно половина круга *cef* = площади круга *abc*.

321. ЗАДАЧА. *Полкруга adb превратить въ кругъ.*

ф. 233. *Рѣшен.* Поставь изъ центра *c* на дїаметрѣ *ab* перпендикуляръ *dc*, протяни *db*, сдѣлай на оной кругъ, которой будетъ равенъ полкругу *adb*.

Доказ. Понеже луночка *debfd* = треугольнику *bcd* (269), къ коимъ придавъ общїй сегментъ *dbed* будетъ полкруга *alf* = четверти круга *cbed*, слѣдовательно кругъ *dcbf* = полкругу *adeb*.

322. ЗАДАЧА. *Элипсисъ acbd превратить въ кругъ.*

ф. 231. *Рѣшен* Сыщи между *ab* и (*cd*) *bf*, среднюю пропорцїональную линѣю *be*, раздѣля оную пополамъ опиши кругъ *be*, которой будетъ равенъ элипсису *acbd* (279).

О СЛОЖЕНIИ ПЛОСКОСТЕЙ.

323. *Начертитъ пятїугольникъ D равенъ даннымъ фигурамъ A и C.*

ф. 234. *Рѣшен.* Преврати кругъ *A* въ квадратъ *f*, также и фигуру *c* въ квадратъ *B* (316.

(316. 318), взявъ квадрата *f* бокъ *gh* за основанїе, квадрата B бокъ *de* за высоту *gi*, протяни линѣю *ih*, сдѣлай на оной квадратѣ *im*; которой будетъ равенъ двумъ даннымъ фигурамъ *A* и *C* (144), потомъ квадратъ *im* преврати въ пятїугольникъ *D* (315), получишь желаемое.

324. ЗАДАЧА. *Начертить фигуру Q, подобну и равну тремъ даннымъ подобнымъ между собою фигурамъ A, B и C.*

Рѣшен. Взявъ бокъ *hp* фигуры *C*, за основанїе *ik*, а бокъ *fg* фигуры *B* за высоту *il*, протяни *lk*, на которой поставя перпендикуляръ *lm* = боку *de* фигуры *A*, протяни *mk*, на которой сдѣлай фигуру *Q*, подобну одной изъ данныхъ, получишь желаемое. ф. 236.

Доказ. Когда на линѣе *lk*, начертишь фигуру подобную даннымъ: то оная будетъ = суммѣ двухъ фигуръ *C* и *B* (267); а на послѣдокъ фигура *Q* равна фигурѣ *A*, которой основанїе *de* = *ml* и равна такой фигурѣ которая равна суммѣ фигуръ *C* и *B* (267); слѣдовательно фигура *Q* равна суммѣ данныхъ фигуръ *A* + *B* + *C*.

Примѣч. Такимъ образомъ всѣ подобныя плоскостныя фигуры складываются. Когда жъ данныя фигуры будутъ не подобны; то должно ихъ превращать въ подобныя, и присложенїи поступать какъ въ прошедшихъ двухъ задачахъ показоно.

О ВЫЧИТАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ.

325. ЗАДАЧА. *Квадратъ B вычесть изъ квадрата A.*

ф. 237. *Рѣшен.* На бокѣ большаго квадрата *A*, опиши полкруга *dcг*, отъ *c* до *e* положи бокъ *fg* меньшаго квадрата; протяни *ed*, будетъ квадратъ *eh* разность между квадратами *A* и *B*.

Доказ. Понеже треугольникъ *ced* прямоугольной (91), того ради $A - B = eh$ (144).

Примѣч. Такимъ образомъ всякую подобную плоскостную фигуру изъ другой вычитать надлежитъ; когдажъ онѣ будутъ не подобны, то должно ихъ превращать въ подобныя, въ прочемъ поступать какъ въ сей задачѣ показано.

О УВЕЛИЧИВАНІИ ПЛОСКОСТЕЙ

326. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ въ два съ половиною раза больше треугольника abc, и что бы съ онымъ былъ одной высоты.*

ф. 238 *Рѣшен.* По продолженіи *ab*, сдѣлай $bd = 1\frac{1}{2}\ ab$, протяни линѣю *dc*, будетъ треугольникъ *acd* желаемой.

Доказ Треугольникъ $abc : acd = ab : ad$ одной высоты *ce* (139), но $ab : ad = 1 : 2\frac{1}{2}$, посему треугольникъ $abc : acd = 1 : 2\frac{1}{2}$, слѣдовательно треугольникъ *acd* въ два съ половиною раза больше треугольника *acb*.

327. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc увеличить въ два раза и три четверти, чтобъ былъ одного основанія.*

Рѣшен. Раздѣли перпендикуляръ be на четыре равныя части, продолжи оной до d такъ, что бы ed равна была $2\frac{3}{4}$ be, протяни ad и dc будетъ треугольникъ adc желаемой. ф. 239.

Доказ. Треугольникъ $abe : aed = eb : ed$ или $1 : 2\frac{3}{4}$; также и треугольникъ $bec : edc = eb : ed = 1 : 2\frac{3}{4}$, посему $abe : aed = bec : edc = 1 : 2\frac{3}{4}$ (ариф. 218); и треугольникъ $(abe + bec) abc : (aed + edc)\ adc = 1 : 2\frac{3}{4}$ (ариф. 241); слѣдовательно треугольникъ adc въ $2\frac{3}{4}$ раза больше треугольника abc.

328. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ, которой бы треугольника abc въ два раза и двѣ трети былъ болѣе, и подобенъ оному.*

Рѣшен. Раздѣли ab на три равныя части, продолжи ab до f такъ, чтобъ $af =$ была $2\frac{2}{3}$ ab, сыщи между ab и af среднюю пропорціональную линѣю ag, сдѣлай $ad = ag$, протяни de, въ параллелъ боку bc, будетъ треугольникъ ade желаемой. ф. 240

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : ade = ab : af$ (299); но af въ $2\frac{3}{4}$ болѣе ab, слѣдовательно и треугольникъ ade въ $2\frac{3}{4}$ болѣе abc.

329. ЗАДАЧА. *Начертить треугольникъ подобной данному abc, и что бы abc содержался къ оному, какъ линѣя af къ fg.*

ф. 241. *Рѣшен.* Сыщи къ линѣе cf, fg и къ основанiю ac четвертую пропорцiональную линѣю ce (108); потомъ между основанiемъ ac и четвертою пропорцiональною ce, сыщи среднюю ch (173); начерти на оной треугольникъ chk подобенъ данному abc, получишь желаемое.

Доказ. Понеже $af : fg = ac : ce$ по рѣшенiю, также и треугольникъ $abc : chk = ac : ce$ (299); слѣдовательно треугольникъ $abc : chk = af : fg$ (ариф. 218) ч. д. н.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая плоская фигура увеличивается въ содержанiи линѣй.

330. ЗАДАЧА. *Начертить четверосторонникъ, котораго бы была плоскость въ трое больше, а бока онаго параллельны бокамъ ab, bc, cd и da даннаго четверосторонника abcd.*

Рѣшен. Изъ произвольно взятой внутри фигуры точки e, проведи во всѣ
ф. 242. углы линѣи, продолжи eb до f такъ, что бы $ef =$ была $3eb$; потомъ сыщи между eb и ef среднюю пропорцiональную линѣю eh, сдѣлай $eg = eh$, протяни gi параллельну bc, ik параллельну dc, kl парал-

параллельну ad., наконецъ проведи lg; будетъ четвеpосторонникъ $gikl$ плоскостью въ трое больше даннаго $abcd$, и подобенъ оному.

Доказ. Понеже площадь четвеpосторонника $abcd : gikl = eb : ef$ (299); но ef въ трое больше eb, слѣдовательно фигура $gikl$ въ трое больше $abcd$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякая правильная и неправильная фигура увеличивается во столько разъ во сколько потребуется.

331. ЗАДАЧА. *Начертить фигуру подобну данной $abcdef$, чтобы данная содержалась къ желаемой какъ 3 къ 5.*

Рѣшен. Бокъ ab раздѣли на три равныя части, на продолженной ab сдѣлай ag равну $\frac{2}{3}$ ab, сыщи между ab и bg, то есть 3мя и 5ю частьми среднюю пропорцїональную линѣю bh. Сдѣлай $bn = bh$, проведи mn параллельну af, ml параллельну ef, lk параллельну ed, ki параллельну dc, будетъ фигура $biklmn$ желаемая. ф. 243.

Доказ. Ибо площадь фигуры $abcdef : biklmn = ab : bg$ (299), или какъ 3 : 5. ч. д. н.

Такимъ образомъ всякая подобная фигура увеличивается въ желаемомъ содержанїи чиселъ.

332. ЗАДАЧА. *Къ фигурѣ $abcd$, которой площадь = 2850° квадратныхъ;*

прирѣзать 1800° *квадратныхъ, параллельно всѣмъ бокамъ.*

Рѣшен. Данныя плоскости сложи вмѣс-
ф. тѣ, то есть 2850° + 1800° = 4650°, коихъ
242. сумма будетъ означать площадь требуемой фигуры; и такъ геометрическое содержанїе данной фигуры *abcd*, къ искомой будетъ 2850° : 4650°; а по раздѣленїи каждого члена содержанїя на такое число, на какое будетъ можно какъ здѣсь на 150, будетъ площадь данной фигуры *abcd* содержаться къ площади искомой фигуры какъ 19 : 31; потомъ изъ произволно взятой внутри фигуры точки *e*, проведи во всѣ углы линѣи, раздѣли какую нибудь изъ оныхъ на примѣръ *eb* на 19 равныхъ частей, продолжа *eb* сдѣлай *ef* = 31 такимъ же частямъ; сыщи между *eb* и *ef* среднюю пропорцїональную линѣю *eh*, опредѣли *eg* = *eh*; напослѣдокъ протяни *gi* параллельну *bc*, *ik* параллельну *cd*, *kl* параллельну *ad* и проведи *lg*; будетъ фигура *gikl* требуемая.

Доказ. Понеже площадь четверосторонника *abcd* : *gikl* = *eb* : *ef* (299) или 19 : 31 = 2850 : 4650 порѣшенїю; по сей причинѣ площадь фигуры *gikl* = 4650° квадр. а вычтя изъ оной площадь фигуры *abcd*, остатокъ 1800° квадр. будетъ требуемая площадь, при рѣзанная въ параллель бокамъ данной фигуры.

Примѣч. Такимъ образомъ ко всякой фигурѣ прирѣзывается, въ параллель бокамъ желаемое число квадратныхъ саженъ; или придается такая часть, какая потребуется какъ на прим. $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$ и проч. данной фигуры.

О ДѢЛЕНІИ ПЛОСКОСТЕЙ

333. ЗАДАЧА. *Раздѣлить треугольникъ abc, изъ угла b на три равныя части.*

Рѣшен. Раздѣли основаніе *ac* на три равныя части въ *d* и *e*, протяни изъ *b* линѣи *bd* и *be* получишь желаемое. ф. 214.

Доказ. Понеже треугольники *bad*, *bde* и *bec*, имѣютъ равныя основанія $ad = de = ec$ и одну высоту *bf*, слѣдственно равны между собою (129).

334. ЗАДАЧА. *Четвеосторонникъ abcd изъ угла c раздѣлить линѣею cf на двѣ равныя части.*

Рѣшен. Преврати четверосторонникъ *abcd* въ треугольникъ *cde* (288), раздѣли *ed* въ *f* на двѣ равныя части, протяни *cf*, которая раздѣлитъ данной четверосторонникъ пополамъ. ф. 215.

Доказ. Понеже треугольникъ $cde =$ четверосторонику *abcd*, и треугольникъ $cef = cfd$ по рѣшенію, слѣдственно тре-

угольникъ $cfd = \frac{1}{2}$ треугольника $ced = \frac{1}{2}$ четверосторонника $abcd$.

ф. 246. *Примѣч.* Когда точка f будетъ внѣ четверосторонника; то проведи fg въ параллель ac, и протяни cg, которая раздѣлитъ четверосторонникъ $abcd$ пополамъ; ибо треугольникъ $acf = acg$ (129), а придавъ къ симъ треугольникъ acd, будетъ треугольникъ $(acf + acd)$ $cfd = (acg + acd)$ $agcd$, но треугольникъ $cfd = \frac{1}{2}$ $ced = \frac{1}{2}$ $abcd$ по рѣшенію (333), слѣдовательно $agcd = \frac{1}{2}$ четверосторонника $abcd$.

335. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd изъ угла c раздѣлить линѣями на три равныя части.*

ф. 247. *Рѣшен.* Преврати четверосторонникъ $abcd$ въ треугольникъ cde (288), раздѣли основаніе ed на три равныя части, въ g и f, проведи cf, и fh праллельно ac, потомъ протяни hc и gc, коими фигура $abcd$ раздѣлится на желаемое число частей.

Доказ. Понеже треугольникъ $gcd = gcf = fce = \frac{1}{3}$ фигуры $abcd$ порѣшенію (333); и треугольникъ $ach = acf$ (129), придай къ симъ треугольникъ acg, будетъ $(ach + acg)$ $agch = (acf + acg)$ $gcf = \frac{1}{3}$ фигуры $abcd$; посему $cgd + agch = \frac{2}{3}$ $adcb$, слѣдственно треугольникъ $chb = \frac{1}{3}$ $abcd$.

336. ЗАДАЧА. *Пятіугольникъ acbed изъ угла a раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен.

Рѣшен. Преврати пятїугольникъ *acbed* въ треугольникъ *afg* (307); раздѣли *fg* на три равныя части, въ *h* и *i*, протяни линѣи *ai* и *hk* въ параллель *ab*, а изъ *k* въ *a* линѣю *ak*, причемъ пятїугольникъ *acbed* линѣями *ai* и *ak* раздѣлится на три равныя части. ф. 248.

Доказ. Треугольникъ $\overline{aed = aeg}$ (129), а придавъ къ симъ треугольникъ *aie* будетъ (*aed* + *aie*) *aied* = (*aeg* + *aie*) *aig* $= \frac{1}{3}$ *afg* $= \frac{1}{3}$ пятїугольника *acbed*. Также треугольникъ *abh* = *abk* (129), придай къ симъ треугольникъ *abi*, будетъ (*abh* + *abi*) *aih* = (*abk* + *abi*) *aibk* (ариф. 33) $= \frac{1}{3}$ *afg* $= \frac{1}{3}$ пятїугольника *acbed*; посему и *akc* $= \frac{1}{3}$ пятїугольника *acbed*,

337. ЗАДАЧА. *Пятїугольникъ bm изъ угла a, раздѣлить на четыре равныя части.*

Рѣшен. Преврати пятїугольникъ *bm* въ треугольникъ *ab4*, раздѣли *b4* на четыре равныя части въ точкахъ 1, 2, 3, протяни *2h* и *3n* въ параллель *ac*, а изъ *a* въ 1, *h* и *n* линѣи *a1*, *ah* и *an*, коими пятїугольникъ *bm* раздѣлится на желаемыя части. ф. 249.

Доказ. Проведи линѣи *a2*, *a3*, будетъ треугольникъ *ab1* = *1a2* = *2a3* = *3a4* (129) $= \frac{1}{4}$ треугольника *ab4*, или $= \frac{1}{4}$ пятї-

угольника *bm* по рѣшенію; но треугольникъ *ca2* = *cha* (129), придай къ онымъ треугольникъ *ca1* будетъ треугольникъ (*ca1* + *ca2*) *1a2* = (*ca1* + *cha*) *1cha* = $\frac{1}{4}$ пятіугольника *bm*; также треугольникъ *ac3* = треугольнику *acn* (129), отъими отъ сихъ треугольникъ *ac2* = *ach*, останется *ac3* − *ac2* = *acn* − *ach*, то есть *2a3* = *ahn* = $\frac{1}{4}$ пятіугольника *bm*, слѣдственно *anm* = $\frac{1}{4}$ пятіугольника *bm*.

338. ЗАДАЧА. *Отъ многоугольника aec, изъ угла b отрѣзать пять шестинъ.*

No. 11 ф. 250 *Рѣшен.* Преврати многоугольникъ *aec*, въ треугольникъ *abh* (308); отдѣли отъ *ah* линѣю *af* равну $\frac{5}{8}$ *ah* (112), протяни *fk* въ параллель *be*, *kd* въ параллель *bg*, а изъ *b* въ *d* линѣю *bd*, которая отъ фигуры *aegc* отдѣлитъ желаемую часть *abdgc*.

Доказ. Треугольникъ *bef* = *bek* (129), придай къ симъ треугольникъ *aeb*, будетъ (*aeb* + *bef*) *abf* = (*bek* + *aeb*) *aekb*, треугольникъ же *bgk* = треугольнику *bgd*, а придавъ къ онымъ фигуру *aegb*, будетъ (*bgk* + *aegb*) *aekb* = (*bgd* + *aegb*) *aegdb* (ариф. 33); слѣдовательно фигура *aegdb* = треугольнику *abf* (ариф. 32); но треугольникъ *abf* = $\frac{5}{8}$ треугольника *abh* = $\frac{5}{8}$ многоугольника *aec*, слѣдовательно и фигура *aegdb* = $\frac{5}{8}$ многоугольника *aec*.

339 ЗАДАЧА. *Раздѣлить многоугольникъ be, линѣею ao на двѣ равныя части.*

Рѣшен. Преврати многоугольникъ be въ треугольникъ aef (312), раздѣли ef въ g пополамъ. Протяни ag и dl въ параллель gc, ol въ параллель ac, проведи изъ a въ o линѣю ao, которая раздѣлитъ фигуру be на желаемыя части. ф. 251

Доказ. Треугольникъ $gcl = gcd$, и треугольникъ cla = треугольнику coa (129), къ суммѣ первыхъ и послѣднихъ двухъ придай фигуру $gcaeg$, будетъ $gcl + cla + gcaeg = gcd + coa + gcaeg$, то есть треугольникъ age = фигурѣ $aocde$; но треугольникъ $age = \frac{1}{2}$ треугольника $eaf = \frac{1}{2}$ фигуры be по рѣшенїю, слѣдовательно и фигура $aocde = \frac{1}{2}$ фигуры be.

Примѣч. Когда точка g будетъ находится внѣ данной фигуры be; то продолжа ag, проведи dh въ параллель gc, и hk въ параллель ac, точки k и a соедини прямою линѣею ak, которая фигуру be раздѣлитъ на двѣ равныя части. Ибо треугольникъ clh = четвеconstороннику $clgd$ по рѣшенїю, и треугольникъ akc = треугольнику $ach = acl + (clh)clgd$ = фигурѣ $acdga$; а когда къ первому и послѣднему изъ сихъ придашь фигуру $acdea$, будетъ $akc + acdea = acdga + acdea$, то есть фигура $akcdea$ = треугольнику age; но треугольникъ $age = \frac{1}{2}$ треугольника $afe = \frac{1}{2}$ фигуры be; слѣдовательно и фигура $akcdea = \frac{1}{2}$ фигуры be. ф. 252.

340. **ЗАДАЧА.** *Треугольникъ abc, изъ точки d лежащей на основаніи ab, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Раздѣли ab на три равныя части въ i и e, протяни ih и eg въ параллель
ф.253 линѣе dc, потомъ проведи dh и dg, которыми треугольникъ abc раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ cdi = треугольнику cdh (129), къ симъ треугольникамъ придай треугольникъ acd, будетъ $cdi + acd = ach + acd$, то есть треугольникъ aci равенъ четвероугольнику $achd$; также треугольникъ $cge = dge$ (129), а когда къ онымъ придашь треугольникъ egb, то будетъ $cge + egb = dge + egb$, то есть треугольникъ $cbe = gbd$; но треугольникъ aci = треугольнику $cbe = \frac{1}{3}$ треугольника acb по рѣшенію, по сему четвероугольникъ $achd = dgb = \frac{1}{3}$ треугольника acb, слѣдовательно и $dgh = \frac{1}{3} acb$.

341. **ЗАДАЧА.** *Не правильной пятіугольникъ abd, изъ точки f лежащей на основаніи, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Преврати пятіугольникъ въ
ф. треугольникф cdh (307), раздѣли ch на
254. три равныя части въ e и g, протяни ei и gk въ параллель df, потомъ проведи

fi

fi и fh, которыя раздѣлятъ пятїугольникъ abd на три равныя части.

Доказ. Поелику пятїугольникъ $abldk$, линѣями de и dg раздѣленъ на три равныя части (336); треугольникъ же eif $= eid$ (129), придай къ симъ фигуру $aeik$, будетъ $eif + aeik = eid + aeik$, то есть фигура $afik =$ фигурѣ $aedk$; но $aedk$ $= \frac{1}{3}$ пятїугольника adb, посему $afik = \frac{1}{3}$ пятїугольника adb. Также треугольникъ $fgh =$ треугольнику ghd, а придавъ къ онымъ фигуру $gblh$, будетъ $fgh + gblh = ghd$ $+ gblh$ то есть фигура $fblh = gbld$, но $gbld = \frac{1}{3}$ пятїугольника abd по рѣшенїю (336), посему и фигура $fblh = \frac{1}{3}$ пятїугокьника abd, слѣдовательно фигура $fidh$ $= \frac{1}{3}$ пятїугольника abd.

342. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ токки d лежащей внутри онаго, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Раздѣли ac на три равныя части въ h и f, протяни изъ b, be и bg въ параллль dh и df, потомъ проведя ed, dg и db треугольникъ abc раздѣлится въ желанныя части. ф. 255

Доказ. Треугольникъ $ebh = ebd$ (129), а когда придашь къ нимъ треугольникъ eba, будетъ ($ebh + eba$) $abh = (ebd + eba)$ $abde$. Треугольникъ $bgf = bgd$ (129), придавъ къ симъ треугольникъ bgc будетъ ($bgf + bgc$) $bcf = (bgd + bgc) bcgd$ (ариф. 33);

но

но треугольникъ $abh = bcf = \frac{1}{3}\, abc$ по рѣшенію (333), чего ради фигура $abde$ = фигурѣ $bcgd = \frac{1}{3}$ треугольника abc; слѣдовательно и треугольникъ $egd = \frac{1}{3}$ треугольника abc.

343. ЗАДАЧА. *Не правильной пятиугольникъ aibco, изъ точки f лежащей внутри онаго, раздѣлить на три равныя части.*

Ф. 256. *Рѣшен.* Преврати пятіугольникъ въ треугольникъ fgh (313), раздѣли gh на три равныя части въ d и l. Протяни de въ параллель fi, km въ параллель af, mn въ параллель fo; потомъ проведя fl, fe и fn пятіугольникъ раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $fid = fie$ (129); придай къ симъ треугольникъ fli, будетъ $fid + fli = fie + fli$ (ариф. 33), то есть треугольникъ fld = фигурѣ $flie$. Также треугольникъ $afh = afm$, а придавъ къ онымъ треугольникъ afl, будетъ $lfh = lfma$; треугольникъ же $ofm = ofn$ (129), придай къ онымъ фигуру $alfo$, будетъ $lfma = lfnoa$, = треугольнику lfh; но треугольникъ $fld = lfh = \frac{1}{3}$ пятіугольника abo по рѣшенію; чего ради и фигура $flie = lfnoa$ $= \frac{1}{3}$ пятіугольника abo, слѣдовательно и фигура $fabcn = \frac{1}{3}$ пятіугольника abo.

Примѣ.

Примѣч. Такимъ образомъ и всѣ правильные и не правильные многоугольники изъ точки въ равныя, и въ данной пропорцїи части дѣлить надлежитъ.

344. ЗАДАЧА. *Въ Треугольникѣ abd, сыскать точку, изъ которой бы проведенными во всѣ углы линѣями треугольникъ abd раздѣлился на три равныя части.*

Рѣшен. Изъ третїй части основанїя *ad*, проведя *ef* параллельно къ *ab*, раздѣли оную въ точкѣ *c* пополамъ, изъ которой проведенныя въ углы линѣи *ca*, *cb* и *cd* раздѣлятъ треугольникъ *abc* на три равныя части. Ф. 257.

Доказ. Ибо треугольникъ $abe = \frac{1}{3}$ треугольника *abd* (333) = треугольнику *abc* (129), при томъ для параллельныхъ линѣй *ab* и *ef* и что $ec = cf$, треугольникъ $eca = cfb$, и треугольникъ $ecd = cfd$ (129), посему треугольникъ $eca + ecd = cfb + cfd$, то есть, треугольникъ $acd = bcd = \frac{1}{3}$ треугольника *abd*.

345. ЗАЧАЧА. *Треугольникъ abc раздѣлить на три равныя части линѣями въ параллель основанїю ac проведенными.*

Рѣшен. Раздѣли бокъ *ab* на три равныя части въ *d* и *e*, сыщи между *bd* и *ba*, и между *be* и *ba*, среднїя пропорцїональныя *bg* и *bh*; сдѣлай $br = bg$ и $bp = bh$, Ф. 258.

$= bh$, потомъ проведи линѣи rv и pf параллельно къ ac, кои раздѣлятъ треугольникъ abc, на три равныя части.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : bvr = ab : bd$ (299): но $bd = \frac{1}{3}\, ab$, посему и треугольникъ $bvr = \frac{1}{3}\, abc$. Также $abc : bfp = ab : be$ (299): но $be = \frac{2}{3}\, ab$, того ради и треугольникъ $bfp = \frac{2}{3} abc$, слѣдственно и часть $apfc = \frac{1}{3}\, abc$.

346. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc раздѣлить параллельными линѣями io, и kp на три части, въ содержаніи линѣй d, e и f.*

ф. 259. *Рѣшен.* Сдѣлай на ac по соизволенію уголъ acn, опредѣли отъ c линѣю cl равну f, lq равну e, qn равну d, протяни изъ l линѣю lm, изъ q линѣю qh въ параллель an; сыщи между ca и cm среднюю ci, также между ca и ch среднюю ck; протяни линѣи io и kp въ параллель ab, которыя раздѣлятъ треугольникъ abc въ желаемыя части.

Доказ. Понеже изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : ioc = ac : mc$ (299), и треугольникъ $abc : bcm = ac : mc$ (139), посему $abc : ioc = abc : bcm$ (ариф. 229); но $abc = abc$, слѣдственно $ioc = bcm$ (ариф. 248), треугольникъ $abc : kpc = ac : ch$ (299), и треугольникъ $abc : bhc =$

ac

$ac : ch$ (139), по сему $abc : kpc = abc : bhc$ (ариф. 229); но $abc = abc$, того для и $kpc = bhc$, а когда отъ сихъ послѣднихъ отъимешъ $ioc = mbc$, то будетъ $kpc - ioc = bhc - mbc$, то есть $kpoi = bhn$, по сей причинѣ и $abpk = abn$; но $bmc : bmh : abh = mc : mh : ha$ (139) или (lc) f : (lq) e : (qn) d, слѣдовательно $ioc : iopk : pkab = f : e : d$.

347. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, раздѣлить на двѣ равныя части, перпендикуляромъ къ основанїю ab проведеннымъ.*

Рѣшен. Опустя перпендикуляръ cd, сыщи между большею частїю ad и половиною основанїя $ab = ae$ среднюю пропорцїональную ah. Сдѣлай $af = ah$, изъ точки f поставленной перпендикуляръ fg раздѣлитъ треугольникъ acb на двѣ равныя части. ф. 268.

Доказ. Ибо треугольникъ $adc : ace = ad : ae$ (139), а изъ подобныхъ треугольниковъ $adc : afg = ad : ae$ (299); по сему $adc : ace = adc : afg$; но $adc = adc$ по сему $ace = afg = \frac{1}{2}$ треугольника abc.

Примѣч. Ежели потребно будетъ отъ треугольника abc, перпендикуляромъ fg отдѣлить $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$ и проч. часть; тогда отъ линѣи ab взявъ $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{7}$, и проч. часть $= ae$, сыщи между оною частїю и перпендикуляромъ cd среднюю пропорцїональную $ak = af$, а напослѣдокъ поставленнымъ изъ точки f перпендикуляромъ fg опредѣлится желаемая часть.

348.

348. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc, провесть линѣю gf параллельно къ ac такъ, чтобы треугольникъ gbf равенъ былъ данной фигурѣ В, которая меньше треугольника abc.*

ф. 261. *Рѣшен.* Данную фигуру *B* преврати въ треугольникъ, потомъ преврати оной въ треугольникъ *abd* по основанію *ab* и углу *abc* (298), сыщи между *bc* и *bd* среднюю пропорціональную *be*, опредѣли $bf = be$, изъ точки *f* проведи *fg* параллельно къ *ac*, будетъ треугольникъ $gbf =$ фигурѣ *B*.

Доказ. Треугольиикъ $abc : abd = bc : bd$ (139), а изъ подобныхъ треугольниковъ $abc : bgf = bc : bd$ (299), по сему $abc : abd = abc : bgf$; но $abc = abc$, чего ради и $abd = bgf =$ фигурѣ *B*.

349. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc изъ точекъ d и e, раздѣлить на три равныя части.*

ф. 262. *Рѣшен.* Сдѣлай $af = \frac{1}{3} ac$, изъ точки *f* проведи *fh* параллельно къ *db*, и протяни *dh* потомъ раздѣли *dc* пополамъ въ *g*, протяни *gk* параллельно *eh*, проведи *ek*; треугольникъ *abc* линѣями *dh* и *ke* раздѣлится на три раныя части.

Доказ. Треугольникъ $bdf = bdh$ (129), и $dbf + abd = bdh + abd$ (ариф. 33), то есть треугольникъ $abf =$ фигурѣ $abhd$: но тре-

треугольникъ $abf = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенїю, посему и фигура $abhd = \frac{1}{3} abc$. Также треугольникъ $ehg = ehk$ (129), и $ehg + ehc = ehk + ehc$ (ариф. 33), то есть треугольникъ gch = фигурѣ $echk$; но треугольникъ $gch = \frac{1}{2} dhc = \frac{1}{3} abc$ по рѣшенїю, посему и фигура $echk = \frac{1}{3}$ треугольника abc.

350. ЗАДАЧА. ***Четвеусторонникъ*** ac ***изъ точекъ*** k ***и*** h ***раздѣлить на три равныя части.***

Рѣшен. Данной четвеусторонникъ ac преврати въ треугольникъ ade. Раздѣли ae на три равныя части въ g и f, протяни fd и gd; которыя раздѣлятъ треугольникъ ade на три равныя части (333), протяни fi въ параллель hd, и gl въ параллель kd; а напослѣдокъ проведя hi и kl, фигура $abcd$ раздѣлится въ желаемыя части. ф. 263.

Доказ. Треугольникъ $dhf = dhi$ (129), посему треугольникъ $dhf + dha = dhi + dha$, то есть треугольникъ adf = фигурѣ $adih$: но треугольникъ $adf = \frac{1}{3}$ треугольника $ade = \frac{1}{3}$ четвеусторонника ac, посему и $adih = \frac{1}{3}$ четвеусторонника ac. Треугольникъ $dkg = dkl$ (129), посему треугольникъ $dkg + dka = dkl + dka$, то есть треугольникъ adg = фигурѣ $adlk$, и треугольникъ $adg - adf = adlk - adih$, то есть треугольникъ dfg = фигурѣ $hilk = \frac{1}{3} ade = \frac{1}{3}$ четве-

$\frac{1}{3}$ четвеностороннка ac; посему и часть $klcb = \frac{1}{3}$ четвеностороннка $adcb$.

351. ЗАДАЧА. *Трапецїю ac, линѣями раздѣлить на четырѣ равныя части.*

ф. 264. *Рѣшен.* Раздѣли dc и ab на четырѣ равныя части въ e, f, g и h, i, k, протяни линѣи he, if и gk; которыми трапецїя ac раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Ибо треугольникъ $ade = ehf = fig = gkc$, также треугол. $aeh = hfi = igk = kcb$ (129), посему часть $adeh = hefi = fikg = kgcb$ равны между собою, слѣдовательно каждая $= \frac{1}{4}$ трапецїи ac.

352. ЗАДАЧА. *Въ треугольникѣ abc сыскать точку p, изъ которой бы проведенныя параллельно къ бокамъ ab и bc линѣи, отдѣлили какую нибудь часть треугольника abc. На прим. $\frac{2}{5}$.*

ф. 265. *Рѣшен.* Взявъ на основанїи ac произвольную точку g, проведи bg, раздѣли оную на пять равныхъ частей (102); между $\frac{2}{5}$ $bg = gk$ и всѣю bg сыщи среднюю пропорцїональную gi, опредѣли $gp = gi$, точка p будетъ желаемая; изъ которой проведя pd и pf параллельно къ ab и bc, опредѣлится треугольникъ $pdf = \frac{2}{5}$ abc.

Доказ. Ибо отъ сочиненїя треугольники dpf и abc подобны, посему треугольникъ

угольникЪ $abc : dpf = bg : gk$ (299): но $gk = \frac{2}{3} bg$, слѣдовательно и $dpf = \frac{2}{3} abc$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякой треугольникъ дѣлится на произвольное число равныхъ частей, или отъ онаго какая угодно часть отрѣзывается, есьли только сыщется средняя пропорцїональная линѣя между bg и такою частїю оной, какая потребна часть треугольника.

353. ЗАДАЧА. *Отъ данной фигуры afc отдѣлить $\frac{2}{3}$, что бы бока желаемой фигуры, были параллельны бокамъ данной, а основанїе было бы въ основанїи af.*

Рѣшен. Изъ произвольно взятой на основанїи cf точки g, проведи во всѣ углы линѣи bg, cg, gd и ge, раздѣли bg на три равныя части. Между bg и $\frac{2}{3} bg = gi$ сыщи среднюю пропорцїональную gh, сдѣлай $gk = gh$, протяни kp, kl, lm, mn и no въ параллель бокамъ ab, bc, cd, de и ef, получишь желаемое. ф. 266.

Доказ. Ибо по сочиненїю треугольники данной фигуры afc подобны треугольникамъ опредѣленной фигуры pol, посему фигура acf подобна plo (241); того ради фигура $acf : plo = bg : ig$ (299) : но $gi = \frac{2}{3} bg$, слѣдовательно и фигура $plo = \frac{2}{3}$ фигуры acf.

354. ЗАДАЧА. *Четверосторонникъ abcd раздѣлить на три равныя части такъ,*

что бы одна часть отдѣлена была параллельною, а другія двѣ перпендикулярною линѣею къ основанію ad.

ф. 267. *Рѣшен.* Четверосторонникъ $abcd$, преврати въ треугольникъ ado. Сдѣлай $ol = \frac{1}{3} od$, проведи al, треугольникъ aol будетъ $= \frac{1}{3}$ треугольника $ado = \frac{1}{3}\ abcd$ (333), продолжи ab и dc пока взаимно пресѣкутся въ точкѣ m, между md и ml сыщи среднюю пропорціональную mn, опредѣли $mf = mn$; изъ f протяни линѣю fe параллельно къ основанію ad. Потомъ раздѣля ef и ad пополамъ въ точкахъ i и k проведи ik, чрезъ средину сей линѣи протяни hg перпендикулярно къ основанію ad, получишь желаемое.

Доказ. Треугольникъ $adm : mef = dm : ml$ (299), и треугольникъ $adm : alm = dm : ml$; и такъ для равенства содержаній будетъ $adm : mef = adm : alm$; но $adm = adm$, по сему $mef = alm$; а отнявъ отъ оныхъ равныя треугольники $bmc = oma$, останется $mef - bmc = alm - oma$, то есть четверостороникъ $ebcf = aol$: но $aol = \frac{1}{3}\ aod = \frac{1}{3}\ abcd$ порѣшенію, слѣдовательно и $ebcf = \frac{1}{3}\ abcd$. Трапеція $aefd = \frac{2}{3}\ abcd$ линѣею ik раздѣлена пополамъ (351); треуголлникъ же $pgi = phk$, потому что $ip = pk$, уголъ $gip = pkh$ (53), и уголъ $ipg = hpk$ (20); чего ради $gfdh = ifdk = aegh = \frac{1}{3}\ abcd$.

Примѣч. Ежели угодно будетъ какой нибудь треугольникъ на при. *amd* раздѣлить такимъ же образомъ на три части: то надлежитъ сперва сыскать между *md* и $\frac{1}{3}$ю оной, среднюю пропорцїональную *mn*, которую положа на бокѣ *md*, провесть параллельную *ef*, потомъ остатокъ дѣйствїя совершить попрежнему.

355. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ точки d лежащей внѣ онаго, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Раздѣли треугольникъ *abc* на три равныя части линѣями *ce* и *cf* (333); потомъ треугольникъ *cbe* преврати въ другой *ikb* (303), то же самое сдѣлай и съ треугольникомъ *cbf*; при чемъ треугольникъ *abc* линѣями *ik* и *hg* раздѣлится на три равныя части. ф. 268.

Доказ. Ибо треугольникъ $ecb = ikb$, и треугольникъ $cbf = gbh = \frac{1}{3}\ abc$ по рѣшенїю (303); также треугольникъ $ecb - fcb = ikb - gbh$, то есть треугольникъ $ecf = ikgh = \frac{1}{3}\ abc$, слѣдственно, и четверосторонникъ $acki = \frac{1}{3}\ abc$.

356. ЗАДАЧА. *Изъ точки n лежащей внѣ трапецїи abcd, раздѣлить оную на три равныя части.*

Рѣшен. Раздѣли *ad* и *bc* на три равныя части въ *g*, *h* и *e*, *f*, проведи *eg* и *fh*, коими трапецїя *abcd* раздѣлится на три равныя части (351); потомъ изъ точки *n* чрезъ ф. 269.

 средину

средину линѣи ge и средину линѣи fh проведи прямыя линѣи nok и npl, коими трапецїя раздѣлится въ желаемыя части.

Доказ. Треугольникъ $keo = goi$, потому что $oe = og$, уголъ $keo = ogi$ (53), и уголъ $koe = goi$ (20); посему треугольникъ $keo + abkog = ogi + abkog$ (ариф. 33), то есть $abeg = abki = \frac{1}{3} abd$, такимъ же образомъ докажется что $dclm = dcfh = \frac{1}{3}$ abc.

357. ЗАДАЧА. ***Неправильной пятїугольникъ $abcde$ изъ точки o лежащей внѣ онаго, раздѣлить на три равныя части.***

Рѣшен. Преврати пятїугольникъ $abcde$
N. 12 въ треугольникъ hci (307), раздѣли hi на
ф. три равныя части въ f и g, протянн cf и
270. cg, коими пятїугольникъ ace раздѣлится на три равныя части (336). Продолжи hi въ обѣ стороны, также bc и cd, пока пересѣкутся съ продолженною въ q и p. Преврати треугольникъ cfq въ другой knq, что бы онаго бокъ kn былъ въ прямой линѣе съ точкою o (303). Равнымъ образомъ преврати треугольникъ cgp въ другой mlp (303), при чемъ линѣи nk и ml, раздѣлятъ фигуру въ желаемыя части.

Доказ. Понеже треугольникъ $cfq = knq$, треугольникъ $cgp = lmp$ по рѣшенїю (303), а отнявъ отъ первыхъ двухъ общую фигуру

гуру

гуру $krfq$, а отъ послѣднихъ фигуру $lsgp$, останется треугольникъ $kcr = rfn$, треугольникъ $cls = msg$; посему $(kcr + bkrfa)$ $abcf = (rfn + bkrfa)$ $abkn = \frac{1}{3}$ пятїугольника $abcde$; также $(cls + lsged)$ $cged = (mcg + lsged)$ $lmed = \frac{1}{3}$ пятїугольника $abcde$, слѣдовательно и $nkclm = \frac{1}{3}\, abcde$.

358. ЗАДАЧА. *Четвеространникъ $abcd$, раздѣлить на двѣ равныя части линѣею ik, параллельною боку cd.*

Рѣшен. Продолжи бока ad и bc, кои пересѣкутся въ f. Преврати четверосто- ф. 271.
ронникъ ac въ треугольникъ cde; раздѣли de въ h пополамъ; между df и fh сыщи среднюю пропорцїональную fg, опредѣли $fi = fg$, изъ i протяни ik въ параллель боку cd, которая раздѣлитъ фигуру $abcd$ въ желаемыя части.

Доказ. Понеже треугольникъ $cdf : chf = fd : fh$ (139), также треугольникъ $cdf : ikf = fd : fh$ (299); и для равенства содержанїй будетъ треугольникъ $cdf : chf = cdf : ikf$; но $cdf = cdf$, посему $chf = ikf$, отъ коихъ отнявъ общїй четвеространникъ $fklh$, останется треугольникъ $kcl = hli$; треугольникъ же $kcl + clid = hli + clid$, то есть треугольникъ $chd = kcdi = \frac{1}{2}\, abcd$, слѣдовательно и $abki = \frac{1}{2}\, abcd$.

359. ЗАДАЧА. *Четвеространникъ $abcd$ раздѣлить на три равныя части линѣями параллельными боку ab.*

ф. 272. **Рѣшен.** Продолжи бока ad и bc кои пересѣкутся въ f, преврати четверосторонникъ $abcd$ въ треугольникъ dce, раздѣли de въ g и h на три равныя части, изъ h и g проведи hc и gc, коими четверосторонникъ $abcd$ раздѣлится на три равныя части. Треугольникъ chd преврати въ другой lmd, что бы онаго бокъ ml былъ параллеленъ боку ab (300); такимъ же образомъ превратя треугольникъ cgf въ другой fki (300), получишь желаемое.

Доказ. Ибо треугольникъ $cfg = fki$ по рѣшенїю (300), отъ коихъ отнявъ фигуру $kogf$, будетъ треугольникъ $kco = goi$ и $kco + kogab = goi + kogab$, то есть $bcga = bkia = ceg = \frac{1}{3}\ abcd$; также и треугольникъ $chd = lmd = \frac{1}{3}\ abcd$ по рѣшенїю, слѣдовательно и $mlcki = \frac{1}{3}\ abcd$.

360. **ЗАДАЧА.** *Отъ фигуры $afecb$, отрѣзать двѣ трети.*

Рѣшен. Раздѣли бокъ ab на три равныя части, сыщи между ab и $\frac{2}{3}ab = am$, среднюю пропорцїональную an, опредѣли $al = an$, изъ a протяни дїогонали ac, ad и ae; изъ l линѣю lk въ параллель боку bc, изъ k линѣю ki въ параллель cd, изъ i линѣю ih въ параллель de, изъ h линѣю hg въ параллель ef, будетъ фигура $alkhg$ желаемая.

ф. 273.

Доказ. Ибо изъ подобныхъ фигуръ $abcdef : alkihg = ab : am$ (299); но $am = \frac{2}{3}$ ab, слѣдовательно и фигура $alkihg = \frac{2}{3}$ фигуры $abcdef$.

Примѣч. Такимъ образомъ отъ всякой правильной и неправильной прямолинѣйной фигуры отрѣзывается желаемая часть.

361. ЗАДАЧА. *Правильной шестїугольникъ al раздѣлить на четырѣ равныя части въ параллель дїогонали cd.*

Рѣшен. и Доказ. Раздѣли трапецїю ac равно и трапецїю cm, на двѣ равныя части ф. въ параллель дїгонали cd (358), получишь 274. желаемое.

362. ЗАДАЧА. *Правильной пятїугольникъ $abcde$, параллельными всѣмъ бокамъ линѣями, раздѣлить на три равныя части.*

Рѣшен. Протяни изъ центра m во всѣ углы радїусы, раздѣли mc на три равныя ф. части въ g и i, сыщи среднюю пропорцїо- 275. нальную ml между mc и mg, также между mc и mi среднюю mk, опредѣли $mf = ml$, и $mh = mk$; проведи изъ f и h линѣи въ параллель бокамъ cd, ed, и прочая получишь желаемое.

Доказ. Изъ подобныхъ фигуръ $abcde : fn = mc : mg$; но $mg = \frac{1}{3} mc$, посему и пятїугольникъ $fn = \frac{1}{3}$ $abcde$, также $abcde : ho$

$= mc : mi$ (299); но $mi = \frac{2}{3} mc$, слѣдственно $ho = \frac{2}{3} abcde$, посему $ho - fn = \frac{1}{3} abcde$.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякую неправильную фигуру раздѣлить можно на произвольное число частей, ежели вмѣсто центра возмется внутри фигуры произвольно точка и проведутся изъ оной во всѣ углы линѣи, а остатокъ дѣйствїя совершится попрежнему.

363. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ bv, изъ точки d раздѣлить на двѣ части въ содержанїи линѣй g и h.*

Рѣшен. Преврати многоугольникъ bv
Ф. въ треугольникъ bck (312), раздѣли bk
276. въ m въ содержанїи линѣй g и h (111), протяни cm, продолжи cp, проведи mo въ параллель cd, oi въ параллель dp, точки i и d соедини прямою линѣею di, которая раздѣлитъ многоугольникъ bv въ желаемыя части,

Доказ. Треугольникъ $cdm = cdo$ (129), и $cdm + cdb = cdo + cdb$ (ариф. 33), то есть $bcm = bcod$; треугольникъ же $pdo = pdi$ (129), и $pdo + pdbc = pdi + pdbc$, то есть фигура $bcpid = bcod$ (ариф. 33) $=$ треугольнику bcm; но $bcm : cmk = bm : mk$ или $h : g$, треугольникъ же $bcm =$ фигурѣ $bcpid$, посему и фигура $div =$ треугольнику cmk, чего ради (bcm) $bcpid$: (cmk) $div = h : g$.

Примѣч.

Примѣч. Такимъ же образомъ всякая неправильная фигура дѣлится въ данномъ содержанїи чиселъ. На прим. 4 : 9 и проч.

364. ЗАДАЧА. *Многоугольникъ abfec изъ точки n раздѣлить на двѣ части въ содержанїи an : nb.*

Рѣшен. Протяни изъ e линѣю ho параллельну ab, преврати многоугольникъ cf въ трапецїю ob (311); раздѣли ho въ i какъ ab раздѣлена въ n (110), проведи il въ параллель ne, наконецъ точки l и n соедини прямою линѣею nl, получишь желаемое. Ф. 277.

Доказ. Треугольникъ $ano : nbh = an : nb$ и треугольникъ $oni : ihn = oi : ih$ (139) $= an : nb$ по рѣшенїю, посему для равенства содержанїй, треугольникъ $ano : nbh = ion : ihn = an : nb$; причемъ $(ano + oin)$ $anio : (nbh + ihn)\ nbhi = an : nb$ (ариф. 241): но четвеpосторонникъ $neoa$ = фигурѣ $nedca$ по рѣшенїю, и треугольникъ $nei = nel$ (129), чего для $neoa - nei = nedca - nel$, то есть четвеpосторонникъ $anio$ = фигурѣ $anldc$, посему фигура $nbfel$ = четвеpосторонн‌ику $nbhi$, слѣдственно $(anio)\ anldc : (nbhi)\ nbfel = an : nb$.

365. ЛЕММА. *Разность двухъ квадратовъ aceh и abdg, равна квадрату изъ средней, между суммою и разностїю боковъ тѣхъ же квадратовъ.*

Рѣшен.

Рѣшен. Продолжи eh до k такъ, чтобы
ф. 278. hk была равна ab, протяни ki въ параллель ec, продолжи dg пока пересѣчется съ линѣями ik и ec въ i и f; будетъ по положенію $ac + ab = eh + hk = ek$ и $ac - ab = ah - ag = hg = ki$, по сему прямоугольника $ekif$ основаніе $ek =$ суммѣ, а высота $ik =$ разности боковъ двухъ квадратовъ. Прямоугольники жъ bf и gk сдѣланные изъ равныхъ линѣй bd (ab) $= hk$ и $bc = ac - ab = ah - ag = hg$ равны между собою, къ которымъ придавъ прямоугольникъ fh, будетъ $cd + fh =$ разности двухъ квадратовъ $aceh$ и $abdg =$ прямоугольнику fk; но прямоугольникъ $fk =$ квадрату kn (172); слѣдовательно разность квадратовъ $aceh$ и $abdg =$ квадрату kn.

366. ЗАДАЧА. *Чрезъ данную точку p, лежащую между двухъ данныхъ линѣй ab и ac провесть линѣю em, которая бы между данныхъ линѣй, опредѣлила треугольникъ aem равенъ данной фигурѣ Q.*

Рѣшен. Данную фигуру Q преврати въ
ф. 279. параллелограмъ ar повѣсотѣ ph и углу cab (307. 287), сдѣлай $pi = pg$, потомъ между суммою линѣй $gp + pr$ и разностію $pr - gp = ir = rk$, сыщи среднюю пропорціональную rl (173), опредѣли $dm = rl$, изъ точки m чрезъ p проведи линѣю me, получишь желаемое.

Доказ.

Доказ. Ибо прямоугольникъ изъ суммы $gp + pr$, и разности $pr - gp = rk$, равенъ разности квадратовъ изъ тѣхъ же линѣй (365), то есть $gr \times rk = \overline{pr}^2 - \overline{pg}^2$ равно $\overline{rl}^2 = \overline{md}^2$ (172), къ симъ послѣднимъ количествамъ придай $\overline{pg}^2$, будетъ $\overline{pr}^2 = \overline{md}^2 + \overline{pg}^2$ (ариф. 33); треугольники жъ egp, prf и fdm между собою подобны; того ради $egp : \overline{gp}^2 = dfm : \overline{dm}^2 = pfr : \overline{pr}^2$ (164), и притомъ $egp + dfm : \overline{gp}^2 + \overline{dm}^2 = dfm : \overline{dm}^2 = pfr : \overline{pr}^2$; но $\overline{gp}^2 + \overline{dm}^2 = \overline{pr}^2$, по сему $egp + dfm = pfr$, слѣдовательно $egp + dfm + agpfd = pfr + agpfd$ (ариф. 33), то есть треугольникъ aem = параллелограму $agrd$ = фигурѣ Q.

Примѣч. Когда линѣя pr будетъ меньше pg, то данную фигуру должно превратить въ параллелограмъ по высотѣ pn, а остатокъ рѣшенія дѣлать попрежнему: естли жь и въ семъ случаѣ будетъ такоежъ препятствïе, то значитъ, что линѣею проведенною чрезъ точку d, треугольника равнаго данной фигурѣ опредѣлить не можно.

367. ЗАДАЧА. *Чрезъ точку p лежащую внутри данной фигуры $abcdefg$, провесть линѣю ik которая бы отрѣзала $\frac{1}{8}$ данной фигуры.*

Рѣшен. Данную фигуру $abcdefg$ преврати въ треугольникъ men, опредѣли $ml = \frac{1}{3}$ ф. 280.

mn

mn, проведи *el*, треугольникъ *mel* будетъ $= \frac{1}{3}$ фигуры *abcdefg*, продолжи *ab* и *ef* пока пересѣкутся въ *h*, потомъ по прошедшей задачѣ протяни *ik* такимъ образомъ, чтобъ треугольникъ *ikh* былъ равенъ фигурѣ *fgah* съ треугольникомъ *mel*, по лучишь желаемое.

Доказ. Поелику треугольникъ *ikh* = фигурѣ *fgah* съ треугольникомъ *mel* по рѣшенію, отъ коихъ отнявъ общую фигуру *fgah*, останется фигура *kfgai* = треугольнику *mel* $= \frac{1}{3}$ данной фигуры *abcdefg*.

Примѣч. Такимъ образомъ отъ всякой фигуры отрѣзывается желаемая часть, или опредѣляется линѣею *ik* часть, равная данной другой какой нибудь фигурѣ.

368. ЗАДАЧА. *Треугольникъ abc, изъ точки h раздѣлить по геометрическому маасъ-штабу на три равныя части.*

Ф. *Рѣшен.* Смѣряй части основанія тре-
281. угольника *ch* и *hb* и высоту *al* по маасъ-штабу, сыщи площадь треугольника *abc* которая пусть будетъ 2700° квадратныхъ. Раздѣли оную площадь на три равныя части, частное число 900° будетъ $= \frac{1}{3}$ *abc*, третью часть площади *abc* раздѣли на половину *bh* = 70°, частное число 25°. 5′ взявъ съ маасъ-штаба положи по перпендикуляру отъ *b* до *f*, протяни *fe* въ параллель *bc*, изъ *h* въ *e*; будетъ треугольникъ *beh*

$= \frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}$ *abc*. Потомъ раздѣли третью часть 900° на половину *hc* = 20°, частное число 90° взявъ съ маасъ-штаба положи по перпендикуляру *cd*, изъ *d* протяни *dg* въ параллель *bc*, которая съ продолженною *ca* пересѣчется въ точкѣ *g*, изъ *g* протяни *gk* въ параллель *ah*, точки *k* и *h* соедини прямою линѣею *kh*, получишь требуемое.

Доказ. Понеже $hb = 70°$ и $bf = 25°.5$ по рѣшенїю: то площадь треугольника $beh =$ будетъ $\frac{hb \times bf}{2} = 35° \times (25°.5') = 900° = \frac{1}{3}$ *abc*. Также плоскость треугольника $hcg = \frac{cd \times ch}{2} = \frac{90° \times 20°}{2} = 900° = \frac{1}{3}$ *abc*; но треугольникъ $ahg = ahk$ (129), и (*ach* + *ahg*) cgh = (*ahk* + *ach*) *achk* $= \frac{1}{3}$ *abc* слѣдовательно и $khg = \frac{1}{3}$ *abc*.

369 ЗАДАЧА. *Каждой многоугольникъ какъ здѣсь bde, раздѣлить по геометрическому маасъ-штабу на столько частей, на сколько желаешъ. На примѣръ на три равныя части.*

Рѣшен. и Доказ. Протяни въ многоугольникѣ дїоголи *ac*, и *ad*, которыя раздѣлятъ многоугольникъ въ треугольники *abc*, *acd* и *ade*, опусти изъ *e*, *d* и *b* на дїогонали перпендикуляры *en*, *do* и *bp*, смѣряй оные по геометрическому маасъ-штабу, также и дїогонали *ac* и *ad*: потомъ сыщи площадь

Ф. 282.

площадь треугольника *aed*, *adc* и *abc* (137); площади оныхъ треугольниковъ сложи вмѣстѣ получишь площадь фигуры *bde*. Раздѣли оную на столько равныхъ частей на сколько дѣлить желаешъ, то есть на три равныя части, частное число будетъ площадь каждой третїй части многоугольника *bde*; а понеже площадь треугольника *abc* извѣстна: то положимъ что оная будетъ меньше сысканнаго количества третїй части, и такъ вычтя площадь треугольника *abc* изъ количества третїй части многоугольника *bde*, остатокъ раздѣли на половину основанїя *ac*, частное будетъ равно высотѣ *cm*, такого треугольника которой въ число третїй части къ треугольнику *abc* придать должно. Протяни *im* въ параллель *ac* и изъ *i* въ *a*, будетъ фигура $abci = \frac{1}{3} bde$. Потомъ надлежитъ отдѣлить вторую часть *akhi*, что бы оная и оставшая третья часть были четверосторонники; того ради вымѣряй *ai* по маасъ-штабу, раздѣли половину третїй части, то есть шестую часть данной фигуры на половину *ai*, получишь перпендикуляру *ig*, протяни изъ *g*, *gh* въ параллель *ai* и протяни *ah*, вымѣряй *ah* по маасъ-штабу, раздѣли на половину *ah* оставшую половину третїй части многоугольника, частное число будетъ равно перпендикуляру *al*, протяни изъ *l*, *lk* въ параллель *ah*, а изъ *k* въ *h* линѣю *kh*, будетъ фигура *akhi* равна $\frac{1}{3}$ фигуры *bde*, также и часть $kedh = \frac{1}{3}$ фигуры *bde*.

Чи-

Числами.

$ad = 120'$, $ac = 100'$, $en = 30'$, $do = 68'$, $bp = 40'$

площ. $\triangle aed = \frac{ad \times en}{2} = \frac{120' \times 30'}{2} = 1800''$

площ. $\triangle adc = \frac{ac \times od}{2} = \frac{100' \times 68'}{2} = 3400''$

площ. $\triangle acb = \frac{ac \times bp}{2} = \frac{100 \times 40'}{2} = 2000''$

площ. всего многоугольн. $abcde = 7200''$

$\frac{7200''}{3} = 2400'' = \frac{1}{3}\, abcde$

$\frac{1}{3} abcde - \triangle acb = 2400'' - 2000'' = 400'' = \triangle aic$.

$\frac{400}{50} = 8' =$ перпен. cm.

$2000'' + 400'' = 2400'' = \triangle aic + \triangle acb = \frac{1}{3} abcde = abci$.

$\frac{2400'}{2} = 1200' = \frac{1}{6}$ фигуры $abcde$

$ai = 80'$. $\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2}\, ai$.

$\frac{1200''}{40} = 30' =$ перпендик. ig. $ah = 90'$

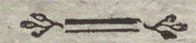
$\frac{1200''}{45} = 26', 8'' =$ перпенд. al.

$1200'' + 1200'' = 2400'' = \triangle aih + \triangle akh =$ четвероугольн. $abci =$ трап. $akhi$.

$2400'' + 2400'' = 4800'' =$ четвероугол. $abci$ $+$ трап. $akhi = \frac{2}{3}\, abcde$.

$7200'' - 4800'' = 2400'' = abcde - abchk = kedh$.

Примѣч. Сія задача весьма полѣзна въ геодезіи при раздѣленіи полей на желаемое число частей.



О РАЗЛИЧНЫХЪ ПОЛОЖЕНІЯХЪ ПЛОСКОСТЕЙ.

No13 ф. 283. 370. *Опред. Линѣя ac къ плоскости mn перпендикулярная* называется та, которая со всѣми линѣями на плоскости mn чрезъ точку c проведенными дѣлаетъ углы acd, acm, acg и acn прямые.

ф. 284. 371. *Опредѣл. Плоскость pq перпендикулярная къ плоскости mn* есть та, которая пересѣкается съ другою такъ, что линѣи ab, cd на плоскости pq проведенныя, будутъ къ общему плоскостей разрѣзу pr и къ плоскости mn перпендикулярны.

ф. 283. 372. ТЕОРЕМА. Iе. *Линѣя acb, пересѣкается плоскостїю mng только въ одной точкѣ c.* 2е. *Когда двѣ точки c и d прямой линѣй dc лежатъ на плоскости mg, то и вся линѣя dc лежитъ на тойже плоскости.* Ибо въ противномъ случаѣ, поверьхность будетъ не прямая. 3е. *Положенїе плоскости dcm опредѣляютъ три точки d, c, m.* Ибо явно что плоскость dcm положенная на сїи три точки, непремѣнно на нихъ опереться должна. ф. 284. 4е *Ежели плоскость pqr, пересѣчется плоскостїю mn, то сѣченїе ихъ pr, будетъ прямая линѣя.* Ибо сѣченїе pr есть линѣя общая обѣимъ плоскостямъ, поелику на плоскостяхъ положенныя линѣи суть прямыя, чего ради и сїя линѣя будетъ прямая. ф. 285. 5е. *Ежели двѣ параллельныя плоскости ml и nk разрѣжутся третїею плоскостїю $abgf$: то сѣченїи ихъ ab и fg, будутъ линѣи параллельныя между собою.* Ибо ежели онѣ не параллельны, то сойтится могутъ, по-

чему

чему и плоскости на коихъ онѣ находятся также сойдутся, и потому не будутъ параллельны. *6е. Изъ точки a которая внѣ плоскости, также изъ точки c находящейся въ плоскости болѣе одной перпендикулярной линѣи ac къ плоскости dmn провесть не можно.* Ибо ежели положимъ что *ag* и *pc* будутъ перпендикулярны къ плоскости, то сему быть не можно, потому что *ac* и *pd* ко всѣмъ линѣямъ на плоскости лежащимъ перпендикулярны, того ради корочѣ *ag* и *pc*, слѣдовательно линѣи *ag* и *pc* неимѣютъ во всѣ стороны равнаго наклоненїя, а потому и не перпендикулярны. *7е. Когда двѣ плоскости gm, pn перпендикулярныя къ третїй плоскости cd пересѣкутся между собою, то общее оныхъ сѣченїе линѣя ab, будетъ перпендикулярна къ плоскости cd.* Ибо ежели изъ общей двумъ плоскостямъ *gm* и *pn* точки *b* провесть перпендикуляръ *ab* къ плоскости *cd*, то оной будетъ находится въ плоскости *gm* и *pn*; а въ противномъ случаѣ плоскости не будутъ перпендикулярны къ плоскости *cd*, слѣдственно сей перпендикуляръ будетъ линѣя общаго разрѣза двухъ плоскостей.

ф. 283.

ф. 286.

373. ТЕОРЕМА. *Наклоненїе двухъ плоскостей bm и bq, равно углу dxp опредѣленному двумя линѣями dx и px перпендикулярно къ общему плоскостей сѣченїю ab на обѣихъ плоскостяхъ bn и bg проведенными.*

Доказ. Ибо ежели вообразимъ себѣ, что плоскость *bq* положена на другую плоскость *bm*, и не отдѣляя одного своего конца *ab* отъ общаго плоскостей сѣченїя, начнетъ другимъ отдвигатся: то точка *d* на линѣе *xd* взятая находящаяся въ точкѣ *p* плоскости *bm*, будетъ описыватъ ф. 287.

дугу pd, которая есть мѣра угла pxd (13) или угла опредѣленнаго двумя плоскостьми bm и bq.

ф. Слѣдст. Наклоненїе линѣи pc къ плоскости
283. mcd, равно углу pcd, опредѣленному линѣею pc, и линѣею cd изъ точки c по плоскости mcd проведенною къ концу d перпендикуляра pd, изъ точки p на плоскость mcd опущеннаго.

ф. 374. ТЕОРЕМА. *Разстоянїе точки p отъ*
283. *плоскости gmd, измѣряется перпендикуляромъ pd изъ той же точки на плоскость опущеннымъ.* Ибо pd корочѣ нежели cp, потому что pd есть перпендикуляръ на линѣе cd; слѣдственно кратчайшее разстоянїе точки p отъ плоскости есть линѣя pd.

375. ТЕОРЕМА. *1е Ежели нѣсколько плос-*
ф. *костей пересѣкутся въ одной линѣе ab,*
286. *то сумма угловъ взаимнаго ихъ наклоненїя около линѣи ab, равна 360 грд. 2е. Ког-*
ф. *да нѣсколько параллельныхъ плоскостей*
285. *пересѣкутся одною плоскостїю, то углы въ одну сторону лежащїе, и на крестъ между параллельныхъ плоскостей будутъ равны между собою; также сумма двухъ угловъ находящихся внутри двухъ параллельныхъ плоскостей, равна двумъ прямымъ угламъ. 3е Ежели двѣ плоскости взаимно пересѣ-*
ф. *кутся; то сумма смѣжныхъ угловъ равна*
286. *двумъ прямымъ угламъ; также когда двѣ или нѣсколько плоскостей пересѣкутся тре-*
ф, *тїею плоскостїю такъ, что углы на-*
285. *крестъ или въ одну сторону лежащїе будутъ равны; то оныя плоскости будутъ между собою параллельны и проч.* Ибо о мѣрѣ угловъ отъ наклоненїя плоскостей происходящихъ

щихъ, разсуждается какъ о плоскихъ углахъ линѣями опредѣляемыхъ, о чѣмъ предъ симъ уже говорено.

376. ТЕОРЕМА. *Двѣ прямыя линѣи dc и gc пересѣкающїяся въ точкѣ c, находятся въ одной плоскости.*

Ибо 1е. Плоскость gcd есть поверьхность которой всѣ точки находятся въ прямомъ положенїи (§ 4). 2е. Положенїе плоскости gcd опредѣляютъ три точки c, d и g; слѣдовательно оныя линѣи лѣжатъ въ одной плоскости. ф. 283.

377. ТЕОРЕМА. *Двѣ прямыя линѣи ac и pd перпендикулярныя къ плоскости gcd, параллельны между собою.*

Ибо соединя точки c и d пресѣченїя линѣй ac и pd съ плоскостїю gcd, будутъ линѣи ac и pd перпендикулярны къ линѣе cd (370), посему оныя параллельны между собою (49).

378. ТЕОРЕМА. *Ежели къ одной изъ двухъ параллельныхъ плоскостей линѣя bg перпендикулярна, то оная будетъ перпендикулярна и къ другой плоскости.*

Положимъ что будетъ перпендикулярна къ плоскости nk: то оная будетъ перпендикулярна къ линѣе gf на тойже плоскости проведенной (370); но плоскость ml параллельна къ плоскости nk, чего ради линѣя ab параллельна gf, уголъ fgb + abg = 180° (48); но уголъ fgb = 90, посему уголъ abg = 90°, слѣдовательно линѣя gb, перпендикулярна къ линѣе ba и къ плоскости ml (370). ф. 285.

О ТѢЛАХЪ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ.

379. *Опредѣл.* *Корпусомъ* или *тѣломъ* называется всякое пространство имѣющее

три измѣренія, въ длину, ширину и высоту. *Наружности тѣла* суть плоскости окружающія оное.

ф. 288 и 289 380. *Опредѣл. Призьма* есть тѣло, происходящее отъ движенія какой нибудь плоскости самой себѣ параллельно по линѣе *dh*, стоящей на тойже плоскости. Движущаяся плоскость, на примѣръ пятіугольникъ *ocdgf* или *hke*, называется *основаніе призьмы*.

Слѣдст. Изъ того явствуетъ, что бока основанія призьмы *cd*, *co*, *of*, и проч. во время своего движенія опишутъ паралеллограмы *ch*, *ol*, *oe*, *fk* и проч. коихъ сумма вообще, будетъ ограничивать поверьхность сторонъ призьмы.

Примѣч. I. Призьмы названіе свое получаютъ отъ числа боковъ своего основанія. На прим. когда основаніе призьмы будетъ треугольникъ, четверосторонникъ, пятіугольникъ и проч. то и призьма называется *трехсторонная*, *четверосторонная пятіугольная* и проч.

ф. 290. *Примѣч.* II. Ежели основаніе призьмы будетъ прямогольникъ *cd*, такая призьма нызывается *параллелопипедъ*.

ф. 291 292. *Примѣч.* III. Когда движущаяся плоскость будетъ кругъ, то такое тѣло именуется *цилиндръ*.

381. *Опредѣл.* Линѣя *ab*, проведенная изъ центра нижняго основанія правильнаго много-

многоугольника или круга, въ центръ верхняго, называется *ось призмы* или *цилиндра.* фиг. 288. 289. 290. 291 и 292.

Примѣч. I. Ежели ось *ab*, будетъ перпендикулярна къ плоскости верьхняго или нижняго основанія; тогда призьмы и цилиндры называются *прямыя.* Естьли жъ *ab* будетъ не перпендикулярна къ плоскости основанія, въ такомъ случаѣ оныя называются *наклоненными* или *косыми.* ф.288 290 291. ф.289 и 292

Примѣч. II. Прямой цилиндръ произходитъ также отъ обращенія прямоугольника *db* около одного своего бока *ab*, которой будетъ ось цилиндра. Ибо паралельныя линѣи *ad* и *bh*, опишутъ круги, а линѣя *dh* поверхность онаго. ф.291

382. *Опредѣл. Высота призьмы* или *цилиндра* есть линѣя *ab* и *ef* перпендикулярная къ обѣимъ паралельнымъ плоскостямъ *he* и *df*; на которыхъ основанія находятся. фиг. 288, 289, 290, 291, 292.

383. *Опредѣл. Пирамида* есть тѣло произходящее отъ движенія какой нибудь плоскости въ верьхъ самой себѣ паралельно, по прямой линѣе *gv* стоящей на тойже плоскости, уменьшая свои бока въ арифметической прогресіи до тѣхъ поръ, пока послѣдняя плоскость равна будетъ точкѣ *v* или нулю. Плоскость *abcde* называется *основаніе пирамиды.* Точка *v* верьхъ пирамиды именуется. ф. 293 294.

Слѣдст. Понеже основаніе пирамиды можетъ быть треугольникъ, четверосто-

ронникъ пятїугольникъ и проч. того ради пирамида называется *трехсторонная*, *четверосторанная и проч.*

Примѣч. Ежели движущаяся плоскость *ab* будетъ кругъ, то такое тѣло именуется конусъ. *фиг.* 295 и 296.

384. *Опредѣл.* Линѣя *vg* проведенная изъ верьха *v*, въ центръ *g* правильнаго много-
ф293 угольника или круга, называется *ось пира-*
и296 *миды или конуса.* Линѣя *av наклоненной бокъ.*
Ежели ось *vg* перпендикулярна къ плоскос-
ф. ти основанїя, то пирамиды или конусы на-
294 зываются *прямыя*, а въ противномъ слу-
и296 чаѣ именуются *наклоненными* или *косы-ми.*

Примѣч. Прямой конусъ произойдетъ также и
ф295 отъ обращенїя прямоугольнаго треугольника *agv*, около одного своего бока *vg* за ось конуса взятаго; ибо линѣя *ag* опишетъ кругъ, а дїогональ *av* поверьхность конуса.

385. *Опредѣл. Высота пирамиды* или *конуса* есть линѣя *vg* или *vh*, перпендикулярно опущенная изъ верьха пирамиды на плоскость, въ которой основанїе находится. фиг. 293. 294. 295 и 296.

386. *Опредѣл. Отрѣзная* или *сокращен-*
ф. *ная пирамида* есть тѣло происходящее
297. отъ движенїя какой нибудь плоскости на прим. *abcd* самой себѣ параллельно по прямой линѣе *ki* стоящей на тойже плоскос ти

ти уменьшая свои бока вЪ арифмѣтической прогресіи такЪ, что послѣдняя плоскость *ehgf* не дойдя до точки *h* остановится. Параллельныя плоскости *abcd* и *efgh* называются *основаніями пирамиды.*

Примѣч. I. Когда движимая плоскость будетЪ кругЪ *ab*, то произшедшее отЪ такого движенія тѣло называется *отрѣзной конусЪ* ф. 298

Примѣч. II. ОтрѣзнойконусЪ также произойдетЪ и отЪ обращенія прямоугольной трапеціи *aikc* около своего перпендикулярнаго бока *ik*, которой будетЪ осью конуса; ибо двѣ не равныя параллельныя линѣи *ai* и *ck* опишутЪ круги, а линѣя *ac* поверьхность онаго.

387. *Опредѣл.* *Шар*Ъ или *сфера* есть тѣло происходящее отЪ обращенія полукруга *adb* около своего діаметра *ab*. ДіаметрЪ *ab* называется *ось*, а концы онаго, то есть точки *a* и *b* *полюсами шара* именуются. ф. 299.

Слѣдст. По сему шарЪ есть тѣло опредѣленное такою выпуклою поверьхностію, которой всѣ точки отЪ внутренней точки *c* (имянуемой *центромЪ шара*) вЪ равномЪ разтояніи находятся.

388. *Опредѣл.* *ВырѣзокЪ* или *секторЪ шара ezfa*, есть тѣло происходящее отЪ обращенія вырѣзка круга *zaf* около одного своего бока *az* за ось взятаго. ф. 300.

ф. 301 389. *Опредѣл.* *Отрѣзокъ* или *сегментъ* *шара* *fsea* есть тѣло, которое происходитъ отъ обращенія полуотрѣзка круга *ase* около своего перпендикуляра *as* стоящаго на срединѣ хорды *ef*.

ф. 302 390. *Опредѣл.* Часть поверьхности шара находящаяся между двухъ параллельныхъ круговъ *ab* и *cd* называется (*зона*) *поясъ*.

Примѣч. Изъ вышеписанныхъ предложеній видно, что тѣла произходятъ по большей части двоякимъ образомъ, то есть или отъ обращенія плоскости около одного своего бока за ось взятаго, или отъ движенія тойже плоскости по прямой линѣе; изъ чего явствуетъ 1е. Что при обращеніи плоскости всякая перпендикулярная линѣя изъ каждой точки оси въ плоскости проведенная, опишетъ кругъ; коихъ число будетъ равно числу точекъ неподвижной бокъ или ось составляющихъ, или числу линѣй опредѣляющихъ поверьхность вращающейся плоскости. 2е. Движимая плоскость подымаясь по прямой линѣе, оставитъ столько касающихся между собою слѣдовъ или плоскостей, сколько есть точекъ въ линѣе по которой плоскость движеніе имѣть будетъ; по сему число сихъ плоскостей въ первомъ и послѣднемъ случаѣ есть одно; слѣдовательно всякое тѣло почитать можно составленнымъ изъ безконечнаго числа плоскостей или безмѣрно тонкихъ слоевъ.

391. *Опредѣл.* Ежели какое нибудь тѣло на прим. *de* и *avb* разрѣжется плоскостію параллельною основанію, то фигура *mn* и *kl* на поверьхности тѣла изображенная, называется *сѣченіемъ* или *раз-*

разрѣзомъ. Кои въ прямыхъ призьмахъ будутъ равны, а въ пирамидахъ подобны основанïямъ. Сѣченïи жъ цилиндровъ, конусовъ и прочихъ тѣлъ происходящихъ отъ обращенïя, будутъ круги. Смотри фигуры отъ 288 до 298.

392. *Определ. Корпусной уголъ* или *уголъ тѣла* называется тотъ, которой составляется изъ нѣсколькихъ плоскихъ угловъ acb, acd и bcd лежащихъ на разныхъ поверьхностяхъ, коихъ верьхи сообщаются въ одной точкѣ c) точку c должно разумѣть возвышенную надъ плоскостïю abd). ф. 303.

Примѣч. Изъ сего явствуетъ, что два плоскïе угла cab и bad, корпуснаго угла составить не могутъ; потому что одинъ надругаго упасть должны; и что для составленïя корпуснаго угла потребно не меньше трехъ плоскихъ угловъ, изъ коихъ сумма двухъ какихъ нибудь угловъ больше третьяго быть должна: ибо два угла acb и acd вмѣстѣ взятые, должны составить угловатую поверхность $dcbad$, слѣдственно оные имѣютъ быть больше третьяго dab.

Слѣдст. Изъ того жъ видно, что корпусной уголъ измѣряется суммою градусовъ плоскихъ угловъ составляющихъ оной уголъ.

393. ТЕОРЕМА. *Сумма всѣхъ плоскихъ угловъ составляющихъ уголъ тѣла, должна быть меньше 360°.*

ф. 293. *Доказ.* Поелику углы *agb*, *bgc* и проч. лежащіе на плоскости *abcde* около точки *g* вообще составляютъ 360°; и такъ ежели вообразимъ себѣ, что точка *g* будетъ возвышаться до точки *v* вмѣстѣ съ линѣями *ag*, *bg*, *gc* и проч. кои вытягиваясь сдѣлаются линѣями *av*, *bv*, *cv* и проч. бока жъ *ab*, *bc*, *cd* и проч. основанія *abcde* останутся непременны: то углы *avb*, *bvc*, и проч. опредѣляющіе корпусной уголъ *v* будутъ меньше угловъ *agb*, *bgc* и проч. посему меньше 360°, слѣдовательно корпусной уголъ неможетъ быть изъ 360 градусовъ.

394. ТЕОРЕМА. *Всякое тѣло ограниченное плоскостьми, меньше четырехъ плоскихъ сторонъ имѣть не можетъ.*

ф. 303. *Доказ.* Ибо для составленія каждаго угла тѣла, требуется не меньше какъ три плоскихъ угла *acd*, *acb* и *bcd*; но уголъ тѣла с такъ составленной, оставляетъ въ нутри себя полость, посему для закрытія оной пустоты, покрайнѣй мѣрѣ еще одна плоскость *abd* потребна; слѣдовательно для составленія всякаго тѣла не меньше четырехъ плоскостей потребно.

395.

395. *Определ.* *Правильное тѣло* есть то, которое окружается равными и правильными плоскостьми и имѣетъ корпусные углы равны: въ противномъ же случаѣ называется *неправильнымъ*.

396. *Определ.* Правильныхъ тѣлъ суть пять. 1е. *Тетраедръ* есть трехъ стороння пирамида определенная четырьмя равными равносторонными треугольниками, какъ *abd*. 2е *Кубъ* *abde* есть правильное тѣло, окружающееся шестью равными квадратами. 3е *Октаедръ* *abcd* (удвоенная четверосторонная пирамида) есть тѣло определенное 8ю равными равносторонными треугольниками. 4е *Додекаедръ* *ag* есть тѣло, окруженное 12ю равными правильными пятїугольниками. И напослѣдокъ 5е *Икосаедръ* *bcfec* есть правильное тѣло, определенное 20ю равными равносторонными треугольниками.

ф. 303, 304, 205, 306, 307.

Слѣдст. I. Поелику всѣ стороны каждаго изъ правильныхъ тѣлъ определяются равными и правильными фигурами, посему всякое изъ нихъ впишется въ шарѣ такимъ образомъ, что всѣ ихъ углы коснутся поверьхности шара, и центръ каждаго соединится съ центромъ шара.

О НАЧЕРТАНІИ ПОВЕРЬХНОСТЕЙ ТѢЛЪ, И О СОСТАВЛЕНІИ ОНЫХЪ ИЗЪ БУМАГИ.

397. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ ab и боку основанія bc, начертить поверьхность пяти сторонной призьмы.*

ф. 308. *Рѣшен.* проведя линѣю ae равну суммѣ бо• основанія призьмы, изъ точекъ a и e поставь перпендикуляры ab и ed равны данной высотѣ ab, протяни bd, раздѣли ae на пять равныхъ частей въ h, i, k и l, протяни hc, im, kn, и lo въ параллель ab, сдѣлай на ik и nm правильные пятïугольники kf и mg, получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ образомъ начертится поверьхность всякой призьмы, когда на произвольно проведенной линѣе ae положится данной бокъ основанія столько разъ, сколько призьма боковъ въ основаніи имѣть должна, и высота опредѣлится равна высотѣ призьмы.

398. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ ab, длинѣ cd и широтѣ ef основанія параллелопипеда, начертить поверьхность онаго.*

ф. 309. *Рѣшен.* На произвольно проведенной линѣе gh, опредѣли gs=cd, sf=ef, fo=gs, oh =sf, изъ точекъ g и h поставь перпендикуляры gi и hn равны данной высотѣ ab, проведи линѣи sk, fl и om въ параллель

ллель gi, сдѣлай на fo и lm прямоугольники lr и fq коихъ бы высоты были $= ef$ получишь желаемое.

399. ЗАДАЧА. *По данной высотѣ gh, и дїаметру ik основанїя прямаго цилиндра, начертить поверьхность онаго.*

Рѣшен. Раздѣли дїаметръ ik на 113 равныхъ частей, проведи линѣю $ab = 355$ такимъ же частямъ, изъ точекъ a и b поставь перпендикуляры ac и $bd =$ данной высотѣ gh, протяни cd; на продолженной ac и bd сдѣлай cf и $be =$ дїаметру ik, наконецъ раздѣля оныя пополамъ опиши круги, получишь желаемое. No 14 Ф. 310.

Доказ. Понеже cb равна окружности круга дїамѣтра ik, по сему согнувъ паралелограмъ ad, что бы бокъ ac соединился съ бокомъ bd, линѣя ab сдѣлается окружностїю основанїя цилиндра; слѣдственно паралелограмъ ad составитъ наружную поверьхность цилиндра.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что поверьхность цилиндра равна паралелограму, коего высота $=$ высотѣ, а основанїе равно окружности основанїя цилиндра.

400. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку ab, и боку cd основанїя прямой*

прямой трехсторонной пирамиды, начертить поверьхность оной.

ф. 311. *Рѣшен.* Изъ произвольно взятой на бумагѣ точки *e*, радїусомъ *ef* равнымъ данному боку *ab* опиши неопредѣленную дугу *fk*, положи по оной бокъ основанїя *cd* три раза въ *g*, *h* и *k*, протяни *fg*, *gh* и *hk*; на конецъ сдѣлай на *gh* равносторонной треугольникъ *ghi*, получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ образомъ поверьхность всякой пирамиды чертить надлежитъ; наблюдая только то, что бы по дугѣ, данной бокъ основанїя полагать столько разъ, сколько пирамида въ основанїи боковъ имѣетъ.

401. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку ab и дїаметру круга ad, начертить поверьхность прямаго конуса.*

ф. 312. *Рѣшен.* Изъ точки *b*, раствоpенїемъ косаго бока *ba* опиши неопредѣленную дугу *ac*, раздѣли дїаметръ *ad* на 113 или на 7 равныхъ частей, потомъ по дугѣ *ac* положи таковыхъ 355 или 22 части, проведи *bc*; на продолженной *ba* сдѣлавъ *ad* = дїаметру *ad* опиши кругъ, получишь требуемую поверхность конуса.

Доказ. Понеже дуга *ac* = окружности круга *aed* (255), посему согнувъ вырѣзокъ *abc* такъ, чтобы бокъ *bc* соединился

съ

съ бокомъ ab, при чемъ дуга ac непремѣнно обойдетъ окружность круга aed, слѣдственно составитъ наружную поверхность конуса.

402. ЗАДАЧА. *По данному боку ab, и діаметру ik и od верьхняго и нижняго круга, начертить поверьхность прямаго отрѣзнаго конуса.*

Рѣшен. По тремъ линѣямъ od, ik и ab, начерти трапецію hf такъ, что бы оной основаніе he равно было od, $cf = ik$ и $ab = ef = hc$ (74), продолжи ef и hc до p. изъ точки p радіусомъ pe опиши неопредѣленную дугу em, діаметръ od раздѣли на 113 или 7 равныхъ частей, каковыхъ положи по дугѣ em 355 или 22 части, проведи pm; потомъ изъ p радіусомъ pf опиши дугу fcl, продолжи lm, сдѣлай $mg = od$ и $ln = ik$, раздѣля оныя пополамъ опиши круги mqg и lnr; фигура $ehmlcf$ будетъ поверьхность отрѣзнаго конуса. ф. 313.

Доказ. Изъ точки p на основаніе eh трапеціи ec опусти перпендикуляръ ps. Теперь вообрази себѣ что прямоугольной треугольникъ hps вообще съ трапеціею $ctsh$ сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около перпендикулярнаго своего бока pts, отъ чего произойдутъ прямой ehp и отрѣзной конусъ $ehcf$, и для подобія треугольниковъ pfc и peh будетъ $pf : pe = fc : eh$ (104) $= fcl$

$= fcl : ehm$ (248. слѣд.); но $fc : eh = fvcz : exhz$ (248), посему $fcl : ehm = fvcz : exhz$ (ариф. 229); но $ehm = exhz$ по положенiю, слѣдственно fcl = окружности $fvcz$ (ариф. 248), и такъ согнувъ поверьхность $fehmlc$, что бы бокъ lm соединился съ бокомъ ef, сдѣлается дуга fcl окружностiю круга nrl или $fvcz$, а дуга ehm окружностiю круга mqg или $exhz$, слѣдовательно составится поверьхность отрѣзнаго конуса.

403. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку mn, бокамъ op и qr верьхняго и нижняго основанiя, начертить поверьхность трехсторонной прямо отрѣзной пирамиды.*

ф. 314. *Рѣшен.* Изъ трехъ линѣй mn, op и qr начерти трапецiю $acdb$ (74), продолжи бока ac и bd до e, изъ точки e радiусомъ ea опиши произвольной величины дугу $abhl$, а радiусомъ ec дугу $cdik$, положи по дугѣ la бокъ ab въ точкахъ h и l, по дугѣ ck бокъ cd въ точкахъ i и k два раза; протяни bh, hl и di, ki наконецъ сдѣлай на bh и df равносторонные треугольники gbh и idf получишь желаемое.

Примѣч. Такимъ же образомъ поверьхность всякой отрѣзной пирамиды чертить надлежитъ наблюдая только то, чтобъ по дугѣ ck и al данной бокъ верьхняго

и

и нижняго основанія полагать столько разъ, сколько пирамида въ основаніи боковъ имѣетъ.

404. ЗАДАЧА. *По данному боку ab начертить поверьхность тетраедра.*

Рѣшен. На продолженной *ab* сдѣлай *ac* = *ab*, на *bc* начерти равносторонной треугольникъ *cbe*, протяни *ad* въ параллель *ce*, *df* въ параллель *bc*, проведи *af*, получишь желаемое. ф. 315

405. ЗАДАЧА. *По данному боку ab начертить поверьхность куба.*

Рѣшен. Продолжи *ab* до *p*, что бы *bp* равна была тремъ *ab*, изъ *a*, *b*, *c*, *d* и *p* поставь перпендикуляры, каждой равенъ *ab*, протяни *fg*, сдѣлай на *cd* и *hi* квадраты *cn* и *ki*, получишь требуемое. ф. 316

406. ЗАДАЧА. *По данному боку bc начертить поверьхность октаедра.*

Рѣшен. Продолжи *bc* въ обѣ стороны, сдѣлай *ab* и *cf* равну *bc*, начерти на *ac* и *bf* равностороные треугольники *acg* и *bfh*, продолжи *gc* до *d*, *hb* до *i*, протяни *be* въ параллель *ag*, *di* въ параллель *af*, проведи *ie* и *ci*, получишь желаемое. ф. 317

407. ЗАДАЧА. *По данному боку ab начертить поверьхность додекаедра.*

Рѣшен. На бокѣ *cb* начерти правильной пятїугольникъ *abd* (214), продолжи дїогонали онаго *ad*, *ac*, *ec*, *eb*, и *db*, сдѣлай *cx*, *az*, *df*, *at*, *cq*, *eu*, *br*, *ev*, *bl* и *dk* каждую $=$ *ab*, раствореніемъ оной изъ *k*, *u*, *t*, *r* и *x* опиши дуги *y*, а изъ *v*, *z*, *l*, *q* и *f* тѣмъже раствореніемъ пересѣки дуги *y*, протяни линѣи *ki*, *iv*, *uy*, *yz*, *ty*, *yl*, *ry*, *yq*, *xy*, *yf*, будетъ половина поверьхности додекаедра. Потомъ продолжи *ei* до *p* и *ek* до *g* каждую $=$ *ab*, раствореніемъ оной сдѣлай изъ *p* и *g* равнобедренной треугольникъ *png* отъ чего произойдетъ правильной пятїугольникъ *pnk*, на линѣе *pn* начерти правильной пятїугольникъ *pnh*, около сего пятїугольника начерти какъ и прежде другую половину, получишь желаемое.

ф. 318.

408. ЗАДАЧА. *По данному боку ab начертить поверьхность икосаедра.*

Рѣшен. Сдѣлай на *cb* равносторонной треугольникъ *abc*, продолжи основанїе *ab* до *d*, что бы *bd* равна была четыремъ *ab*, сдѣлай на оныхъ равносторонные треугольники *x*, протяни чрезъ верьхи ихъ линѣю *cf* $=$ *ad*, точки *d* и *f* соедини прямою линѣею *df*, сдѣлай на *cf* пять равносторонныхъ треугольниковъ, получишь желаемое.

ф. 319.

409. ЗАДАЧА. *По данному дїаметру cd начертить поверьхность шара.*

Рѣшен.

Рѣшен. Проведи линѣю ab равную окружности круга дїаметра cd, раздѣли ab на 24 равныя части, поставь изъ средины каждой перпендикуляры ee, ff, gg и такъ далѣе, что бы каждой былъ $= \frac{1}{4}$ окружности, сыщи центръ такого круга, котораго бы окружность проходила чрезъ точки e, b и e или e, i и e (81), сысканнымъ радїусомъ уступая почасти описывай дуги ebe, fif и такъ далѣе опиши всѣ 24 съ обѣихъ сторонъ дуги, получишь требуемую поверьхность шара. ф. 320.

410. ТЕОРЕМА. *Правильныхъ тѣлъ болѣе пяти быть не можетъ.*

Доказ. Понеже сумма плоскихъ угловъ опредѣляющихъ корпусной уголъ должна быть меньше 360° (393): того ради три угла равностороннаго треугольника изъ коихъ каждой по 60° составляютъ корпусной уголъ тетраедра во 180°. Четыре плоскихъ угла кои по 60° составляютъ корпусной уголъ октаерда въ 240°. Пять плоскихъ угловъ каждой по 60° составляютъ корпусной уголъ икосаедра въ 300°, меньше нежели 360°: но 6 угловъ по 60° = 360°, то есть шесть угловъ равносторонныхъ треугольниковъ корпуснаго угла составить не могутъ; и такъ правильныхъ тѣлъ которыя опредѣляются равносторонными треугольниками болѣе трехъ быть не можетъ. Три квадратные угла изъ коихъ каждой по 90° опредѣляютъ уголъ куба въ 270°; но 4 квадрат- ф. 321.

ф. 322. ные угла корпуснаго угла опредѣлить не могутъ. И наконецъ три угла правильныхъ пятiугольниковъ изъ коихъ каждой = 108° составляютъ корпусной уголъ додекаедра въ 324°; а въ 4 такихъ углахъ будетъ больше нежели 360°, посему другаго правильнаго тѣла изъ пятiугольниковъ кромѣ додекаедра составить не можно. Изъ другихъ же угловъ правильныхъ многольниковъ какъ то шести, семiугольниковъ и проч. уголъ правильнаго тѣла не

ф323 составится. Ибо для составленiя корпуснаго угла по крайнѣй мѣрѣ три плоскихъ угла потребно, коихъ сумма должна быть меньше 360°; но 3 угла шести и семиугольника и проч. не могутъ составить корпуснаго угла менѣе 360°, слѣдовательно и правильныхъ тѣлъ болѣе пяти быть не можетъ.

О ИЗМѢРЕНIИ И СРАВНЕНIИ ПОВЕРЬХНОСТЕЙ ТѢЛЪ.

411. *Опредѣл.* *Поверьхность тѣла* называется только площадь его сторонъ, выключая основанiи буде имѣются: а *цѣлою поверьхностiю* именуется поверьхность тѣла во общѣ съ основанiями.

412. ТЕОРЕМА. *Поверьхность прямой призьмы kdfe равна произведенiю, изъ ея высоты dh на сумму боковъ основанiя.*

No13 ф.288 *Доказ.* Ибо поверьхность призьмы окружается толикимъ числомъ паралелограмовъ

грамовъ сколько боковъ въ основанїи находится (380); но площадь каждаго изъ сихъ паралелограма какъ *dclh* равна произведенїю высоты призьмы *hd* чрезъ бокъ основанїя *cd* или *co* умноженной; того ради поверьхность призьмы равна произведенїю ея высоты *dh*, чрезъ число перпендикуляровъ *dc* составляющихъ окружность основанїя *cdgfo* призьмы *dfk*.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ, что поверьхность прямаго параллелопипеда равна ф.
произведенїю высоты *dh* на окружность 290.
основанїя. Ибо поверьхность параллелопипеда выключая основанїи, равна параллелограму коего высота *gi* равна высотѣ *dh*, ф
а основанїе *gh* равно окружности основа- 309.
нїя *dc* параллелопипеда (398).

413. ТЕОРЕМ. *Поверьхность прямаго цилиндра, dhef равна произведенїю изъ его высоты dh на окружность круга дїаметра fd.*

Доказ. Ибо поверьхность цилиндра равно паралелограаму коего основанїе $ab =$ ф.
окружности круга *df*, а высота $bd =$ вы- 291
сотѣ цилиндра *dh* (399), слѣдовательно 310.
поверьхность онаго равна произведенїю изъ высоты *dh* на окружность основанїя цилиндра.

414. ТЕОРЕМА. *Поверьхность пирамиды edv равна произведенїю суммы*

боковъ составляющихъ окружность основанiя abcde половиною высоты треугольника vp умноженной.

ф. 293. *Доказ.* Понеже основанiе прямой пирамиды есть правильной многоугольникъ, и треугольники окружающiе поверьхность пирамиды равны между собою, изъ коихъ площадь каждаго на прим. *abv* равна, произведенiю половинѣ высоты *vp* умноженной бокомъ основанiя *ab*, то есть $= ab \times \frac{1}{2} pv$; по сей причинѣ и сумма всѣхъ треугольниковъ составляющихъ поверьхность пирамиды $= 5ab \times \frac{1}{2} pv$, то есть поверьхность пирамиды равна произведенiю изъ суммы боковъ основанiя и половины высоты *vp*.

415. ТЕОРЕМА. *поверьхность прямаго конуса, равна треугольнику коего основанiе равно окружности круга основанiя конуса, а высота равна наклоненному боку av.*

ф. 295 312. *Доказ.* Понеже поверьхность конуса *abv* равна сектору *abc*, коего дуга *ac* равна окружности круга дiаметра *ab*, а радiусъ *cb* равенъ наклоненному боку *av* конуса *avb* (401); но вырѣзокъ *abc* равенъ треугольнику коего основанiе равно дугѣ *ac*, а высота равна радiсу *cb* (255) или наклоненному боку *av*, слѣдовательно поверьхность конуса равна треугольнику коего основа-

основанїе равно окружности основанїя, а высота наклоненному боку av конуса.

416. ТЕОРЕМА. *Поверьхность прямой отрѣзной пирамиды, равна произведенїю изъ полсуммы боковъ большаго $abcd$ и меньшаго $efgh$ основанїя пирамиды eg, на высотоу hp трапецїи $dhgc$.*

Доказ. Понеже площадь трапецїи $dhgc$ определяющей сторону пирамиды равна $hp \times \frac{1}{2}(hg + dc)$ (159), слѣдственно поверьхность всей пирамиды будетъ $= hp \times \frac{1}{2}(dc + hg) \times 4 = hp \times \frac{1}{2}(4\,dc + 4hg)$, то есть полсуммы боковъ верьхняго и нижняго основанїя умноженная высотою hp, равна поверьхности пирамиды выключая основанїи. ф. 297.

417. ТЕОРЕМА. *Поверьхность прямаго отрѣзнаго конуса $abdc$, равна трапецїи $mnoq$, которой основанїе mn равно окружности большаго круга ab, параллельная oq равна окружности меньшаго круга cd, а высота mq равна наклоненному боку ac.*

Доказ. Проведи линѣю mn равну окружности круга дїаметра ab, поставь перпендикуляръ ms = боку ah конуса abh, проведи линѣю ns, определи sq = боку ch, протяни qo параллельно mn; будетъ ф. 298 324.

qo = окружности круга дiаметра *cd* и трапецiя *mo* равна поверьхности отрѣзнаго конуса *abdc*. Ибо (положа что окружность круга дiаметра *ab* = *y*, а окружность круга дiаметра *cd* = *r*) для подобiя по сочиненiю треугольниковъ *mns*, *qos* и треугольниковъ *abh* и *hcd*, будетъ *ah* : *hc* = *ab* : *cd*, также (*sm*) *ah* : (*cq*) *hc* = *mn* : *qo* (104), посему *mn* : *qo* = *ab* : *cd* = *y* : *r* (ариф. 227. 229): но *mn* = *y* поположенiю, посему и *oq* = *r* = окружности круга дiаметра *cd*, слѣдственно и треугольникъ *qos* = поверьхности конуса *cdh*; а треугольникъ *mns* = поверьхности конуса *abh* по сочиненiю, слѣдовательно треугольникъ *mns* безъ треугольника *qos*, то есть площадь трапецiи *mo* = поверьхности отрѣзнаго конуса.

418. ЗАДАЧА. *Поданному боку co = 80′ основанiя cdf и высотѣ dh = 150′, пятисторонной призьмы de; сыскать поверьхность оной.*

Рѣшен. Данной бокъ *co* призьмы *de*
ф. 288 умножь числомъ боковъ, произведенiе будетъ равно окружности основанiя *cdgfo*, которую умножа высотою *dh*, произведенiе будетъ равно поверьхности призьмы безъ основанiй, то есть

80′ × 5 = 400′ = окружности. основанiя *cdgfo*
400′ × 150′ = 60000″ квадрат. = поверьхности призьмы.

справе-

справедливость сего показываетъ § 412.

Прибавл. I. Есть ли потребуется цѣлая поверьхность призьмы, то сыщи площадь основанїя призьмы, удвоя оную придай къ поверьхности призьмы получишь желаемое.

419. ЗАДАЧА. *По высотѣ dh = 40° и дїаметру основанїя df = 20° цилиндра ed, сыскать поверьхность онаго.*

Рѣшен. Сыщи по дїаметру *df* окружность основанїя цилиндра, умножь оную высотою *dh*, получишь поверьхность цилиндра. ф291

Числами.

7 : 22 = 20° : 62°, 85″ = окруж. основ.
62° + 85″
× 40

2514°, 00″ = поверьхности цилиндра *ed*.

420. ЗАДАЧА. *Извѣстна цѣлая поверьхность цилиндра ad и высота ac, сыскать онаго дїаметръ основанїя ab.*

Рѣшен. *и Доказ.* Положимъ что *ef* будетъ равна окружности круга дїаметра *ab*, высота *ac* = *eh*: то параллелограмъ *eg* съ параллелограмомъ *hi* (которой равенъ площади двухъ круговъ *ho* и *fp* основанїя цилиндра § 255), то есть параллелограмъ *ei* будетъ равенъ цѣлой поверьхности цилин- No14 ф. 325.

цилиндра. И такъ когда діаметръ *oh* раздѣлится на 14 равныхъ частей, то въ окружности круга $ki = hg$ будетъ 44, а въ радіусѣ *km* 7 такихъ же частей, чего ради сдѣлай слѣдующую пропорцію: $44 : 7 = ekif : ekmn$, то есть площадь параллелограма *ei* къ площади параллелограма *lm* (139), и напослѣдокъ по извѣстной площади параллелограма *em* и разности боковъ *eh*, сыщется радіусъ $kh = km$ (179), и $kh \times 2 =$ діаметру $ho = ab$.

421. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку $av = 50^\circ$ и боку $ab = 60^\circ$ основанія abcde прямой пирамиды ecv, сыскать поверьхность оной.*

No13 ф. 293. **Рѣшен.** Сыщи высоту *vp* треугольника *bcv* (154), потомъ умножь величину бока *ab* чрезъ число боковъ основанія пирамиды, получишь окружность основанія пирамиды; которую умножь половиною высоты *vp*, будетъ требуемая поверьхность, то есть

$$\frac{60^\circ}{2} = 30^\circ = \frac{ab}{2} = bp$$

$$50^\circ \times 50^\circ = 2500^\circ = \overline{av}^2 . \quad 30^\circ \times 30^\circ = 900^\circ = \overline{ap}^2$$

$$2500^\circ = \overline{av}^2$$

$$900 = \overline{ap}^2$$

$$1600^\circ = \overline{av}^2 - \overline{ap}^2 = \overline{vp}^2 . \quad \sqrt{1600^\circ} = 40 = vp.$$

60°

$60^\circ \times 5 = 300^\circ$ = окружности *abcde** основан.

$300^\circ \times \frac{40^\circ}{2} = 6000^\circ$ квадр. поверьх. пирамид.

422. ЗАДАЧА. *По данному наклоненному боку av = 100′ и дiаметру основанiя ab = 70′ прямаго конуса avb, сыскать цѣлую поверьхность онаго.*

По дiаметру *ab* сыщи окружность основанiя конуса *avb* (256), умножь оную половиною наклоненнаго бока *av*, произведенiе будетъ равно поверьхности конуса безъ основанiя; наконецъ сыскавъ площадь круга дiаметра *ab*, придай къ поверьхности конуса получишь требуемую поверьхность. ф. 295.

числами.

100′ = *av*. 70 = *ab*.

7 : 22 = 70′ : 220′ = окруж. круг. дiа. *ab*.

$220' \times \frac{100'}{2} = 11000''$ квад. = повер. кон. *avb*.

$220' \times \frac{70'}{4} = 3850''$ = площ. круг. дiам. *ab*.

11000″
3850″

14850″ = цѣлой поверьхности конуса.

Доказ. справедливость сего видна въ § 415.

423. ЗАДАЧА. *Прямой четвеՐосторонной отрѣзной пирамиды ag, извѣстны бокъ большаго квадрата dc = 80°, меньшаго gh = 20° и наклоненный бокъ dh = 120°; сыскать поверьхность оной.*

Рѣшен.

Ф. 297. **Рѣшен.** Сыщи въ трапецїи *dhgc* перпендикуляръ *hp* (159), сумму боковъ квадрата *ac* сложи съ суммою боковъ квадрата *eg*; умножь половину сей суммы перпендикуляромъ *hp*, получишь требуемую поверьхность безъ основанїй (416); а чтобъ сыскать цѣлую поверьхность, то слѣдуетъ придать къ сему произведенїю плоскость верьхняго квадрата *eg* и нижняго *ac*, получишь желаемое.

числами

$80^\circ = dc.\quad 20^\circ = gh.$

сысканная по (159) высота $hp = 116^\circ$.

$80^\circ \times 4 = 320^\circ =$ сум. бок. квадр. *ac*.

$20^\circ \times 4 = 80^\circ =$ сум. бок. квадр. *eg*.

$320^\circ + 80^\circ = 400^\circ =$ сум. окр. вер. и ниж. квад.

$\frac{400^\circ}{2} = 200^\circ =$ полсум. окр. вер. и ниж. квад.

$\times\ 116$

$23200^\circ =$ поверьхн. пирамид.

$80^\circ \times 80^\circ = 6400^\circ = \overline{dc}^2.\quad 20^\circ \times 20^\circ = 400^\circ = \overline{gh}^2.$

$23200^\circ + 6400^\circ + 400^\circ = 30000^\circ =$ цѣлой пов. пирам. *ag*.

424. ЗАДАЧА. *По данному дїаметру меньшаго круга cd = 40° большаго ab = 100°, и наклоненному боку ac = 180° сыскать поверьхность прямаго отрѣзнаго конуса abdc.*

Ф. 298. **Рѣшен.** По дїаметрамъ *cd* и *ab*, сыщи окружности круговъ, полсуммы сихъ окруж-

окружностей умножь наклоненнымъ бокомъ ac, получишь поверьхность конуса $abcd$ безъ оснований (417); потомъ придай къ сей поверьхности площади обоихъ круговъ ab и cd получишь цѣлую поверьхность конуса.

Числами.

$ab = 100^\circ$. $ac = 180^\circ$. $cd = 40^\circ$.
7 : 22 = 40° : 122°, 7′ = окружн. круга cd.
7 : 22 = 100 : 314, 2′ = окружн. круга ab.
436°, 9′ = суммѣ окружностей

$\frac{436^\circ, 9'}{2} \times 180^\circ = 39321^\circ$ квад. = повер. кон.
сыскан. площадь
круга cd = 1257°
площ. круга ab = 7857°
48435° квадр. = цѣлой поверьх. конуса.

425. ТЕОРЕМА. *Ежели отрѣзной конусъ $acdb$ разрѣжется плоскостiю qr паралельною основанiю ab чрезъ половину наклоненнаго бока ac, то окружность сего сѣченiя будетъ равна полсуммѣ окружностей большаго круга ab и меньшаго cd.*

Доказ. Чрезъ половину наклоненнаго бока bd проведи линѣю xry паралельно боку ac, продолжи cd до y. Дiаметръ qr будетъ = полсуммѣ дiаметровъ cd и ab; ибо No 14 ф. 326.

ибо треугольникъ dry = треугольнику brx, потому что $dr = rb$ по положенїю, уголъ $yrd = xrb$, уголъ $rdy = rbx$, слѣдовательи $dy = bx$ (31); по сему $cy = dy + cd$, $ax + (xb) dy + cd = cy + ax$ = суммѣ дїаметровъ $cd + ab$, но $cy = ax = qr$: по сей причинѣ $cd + ab = 2ax = 2qr$, слѣдовательно $\frac{1}{2}(cd + ab) = qr$. И такъ (положа окружность круга $cd = s$ окружность круга $ab = z$, окружность круга $qr = t$) будетъ $cd : s = ab : z = qr : t$ (248), а для равенства содержанїи $cd + ab : s + z = qr : t$ (ариф. 222): но $\frac{1}{2}(cd + ab) = qr$, слѣдовательно $\frac{1}{2}(s + z) = t$, то есть окружность круга дїаметра qr равна полсуммѣ окружностей большаго круга ab и меньшаго cd.

426. ТЕОРЕМА. *Шаръ A состоитъ изъ неисчетнаго числа отрѣзныхъ конусовъ.*

Доказ. Понеже шаръ происходитъ отъ
ф. 327. обращенїя полукруга abk около своего дїаметра ab (387); но есть ли полукруга $afkqb$ почесть за половину правильнаго многоугольника имѣющаго не исчетность боковъ, и положить что изъ всѣхъ его угловъ опущены линѣи dr, fs, ht и проч. перпендикулярно къ оси ab: то оныя линѣи по двѣ взятыя рядомъ сочинятъ неисчетное число прямоугольныхъ трапецїй $drsf$, $fsht$ и проч. которыя въ обращенїи

обращенiи полкруга abk, составятъ столько же отрѣзныхъ конусовъ $xydc$, $dcef$, $fegh$ и проч. слѣдовательно шаръ можно почитать составленнымъ изъ безконечнаго числа отрѣзныхъ конусовъ, кои хотя не равной но безмѣрно малой высоты.

Примѣч. Понеже всякая точка окружности какъ d, f, h и проч. когда полукружiе обращается описываетъ кругъ, котораго радiусъ линѣя dr, fs и проч. то изъ сего видно, что сѣченiи шара будутъ круги: но какъ изъ оныхъ самая большая линѣя есть kz = радiусу полукруга akb (79); посему самой большей кругъ будетъ тотъ, коего плоскость проходитъ чрезъ центръ z.

427. ТЕОРЕМА. *Поверьхность шара A равна произведенiю дiаметра ab на окружность большаго круга.*

Доказ. Ибо шаръ состоитъ изъ безконечнаго числа отрѣзныхъ конусовъ: Ф. то пусть одинъ изъ оныхъ будетъ ко- 327. нусъ $gcdh$, коего бокъ gc есть дуга ceg безконечно малая часть окружности, которую безъ погрѣшности почесть можно за прямую линѣю. Изъ точки e или средины cg проведи ef въ параллель gh; и чрезъ центръ шара дiаметръ eq, изъ точки c на gh опусти перпендикуляръ co, которой будетъ равенъ оси rt отрѣзнаго конуса, проведя fq будутъ прямоуголь-

ные треугольники gco и efq подобны; ибо уголъ $fec = ogc$ для параллельныхъ линѣи gh и ef, и что cg безъ конечно малая часть окружности есть прямая линѣя: но мѣра угла fec также и угла eqf есть половина дуги eaf (91. 93), посему уголъ $ogc =$ углу eqf, уголъ $goc = efq$ прямые, и уголъ $gco = feq$; чего ради cg: (co) $rt = eq : ef$ (104): но окружности круговъ содержатся какъ ихъ дiаметры (248), посему (положа окружность, дiаметра $eq = x$ а дiаметра $ef = y$) будетъ $cg : rt = x : y$ (ариф. 229), при чемъ $cg \times y = rt \times x$ (ариф. 222); но окружность $y =$ полсуммѣ окружностей дiаметра cd и дiаметра gh (425), посему $cg \times y =$ поверьхности отрѣзнаго конуса $cdhg$ (417), слѣдовательно поверьхность онаго конуса $= rt \times x =$ произеденiю оси rt умноженной окружностiю x большаго круга шара. Равнымъ образомъ докажется, что поверьхность отрѣзнаго конуса $ghki$ и проч. $=$ произведенiю его оси tz умноженной тою же окружностiю; слѣдственно сумма поверьхностей всѣхъ конусовъ, то есть поверьхность цѣлаго шара, равна произведенiю изъ суммы всѣхъ ихъ осей составляющихъ цѣлую ось или дiаметръ шара ab на окружность большаго круга шара. Изъ сего явствуетъ, что поверьхность шара равна такому параллелограму, коего высота дiаметръ ba а основанiе равно окружности большаго круга.

Слѣдст.

Слѣдст. I. Изъ того жъ видно, что поверьхность отрѣзка шара *cwayd* равна произведенїю окружности большаго круга шара умноженной высотою *ar* части шара. Также и поверьхность зоны *efki* равна произведенїю, изъ окружности большаго круга шара и высоты зоны *sz*.

Слѣдст. II. Поверьхность шара, вчетверо болѣе площади большаго круга. Ибо площадь большаго круга шара, равна произведенїю его дїаметра *eq* четвертью окружности $\frac{1}{4}x$, то есть $= \frac{1}{4}x \times eq$; а поверьхность шара равна произведенїю дїаметра *eq* или *ab* окружностїю *x* того жъ большаго круга умноженнаго, то есть $= x \times eq$; по сему $eq \times x$ вчетверо больше $\frac{1}{4}x \times eq$.

Слѣдст. III Изъ перваго слѣдствїя видно, что поверьхности параллельныхъ частей шара *gcdh* и *ghki* и проч. содержатся между собою какъ ихъ высоты *tr* и *tz*. Ибо поверьхность части шара $gcdh = x \times tr$, а поверьхность части шара $ghki = x \times tz$, посему $x \times tr : x \times tz = tr : tz$, для того что произведенїе крайнихъ $x \times tr \times tz$ = произведенїю среднихъ $x \times tz \times tr$. Слѣдовательно оные члены пропорцїональны.

422. ЗАДАЧА. *По данному дїаметру шара $ab = 1000^{\circ}$ сыскать поверьхность онаго.*

Рѣшен. По дїаметру *ab* сыщи окружность большаго круга шара (256), которую умножа дїаметромъ *ab* получишъ требуемую поверьхность. No13 ф. 299.

то есть.

$7 : 22 = 1000^{\circ} : 3142^{\circ}, 857''' =$ окруж.
$3142, 857''' \times 1000^{\circ} = 3142857^{\circ}$ ква. $=$ повер. шар.

Прибавл. Естьли будетъ извѣстна поверьхность шара, то онаго дїаметръ *ab* сыщется слѣдующимъ образомъ: раздѣли поверьхность шара на четырѣ равныя части, получишь площадь круга дїаметра *ab* (427); а по извѣстной площади круга сыщи дїаметръ *ab* (262).

429. ТЕОРЕМА. *Поверьхность отрѣзка шара eaf равна площади круга коего радїусъ хорда ae.*

ф. *Доказ.* Ибо (положа площадь круга радї-
301. уса $az = y$, окружность его $= p$ площадь круга радїуса $ae = x$) будетъ $y : x = \overline{az}^2 : \overline{ae}^2$, а умножа предъидущїе члены чрезъ 4, будетъ $4y : x = (4\overline{az}^2)\ \overline{ab}^2 : \overline{ae}^2$ (ариф. 234): но $\overline{ab}^2 : \overline{ae}^2 = ab : as$ (181), по сему $4y : x = ab : as$, по умноженїи жъ членовъ втораго содержанїя на окружность p, будетъ $4y : x = ab \times p : as \times p$; но $ab \times p = 4y =$ поверьхности шара (427); слѣдовательно $as \times p = z$ (ариф. 248), то есть поверьхность отрѣзка шара *eaf* (427) $=$ площади круга радїуса *ae*.

430. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ $ef = 120^{\circ}$, и высотѣ $as = 40^{\circ}$ отрѣзка шара efa, сыскать цѣлую поверьхность оной.*

Рѣшен.

Рѣшен. Раздѣли *ef* на двѣ равныя части, сдѣлай слѣдующую пропорцїю, *as* : *es* = *es* : *sb* (172), сложи *as* съ *bs*, сумма будетъ = дїаметру *ab*. По дїаметру *ab* сыщи окружность большаго круга шара (256), умножь оную высотою *as*, получишь поверьхность отрѣзка шара *eaf* (427); потомъ по извѣстному дїаметру *ef* сыскавъ площадь круга, придай къ поверьхности отрѣзка шара получишь желаемое. ф. 301.

Числами.

$40^\circ = as.\ 120^\circ = ef.\ \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ = es.$

$as : es = es : sb$

$40^\circ : 60^\circ = 60^\circ : 90^\circ = sb$

40°

$130^\circ =$ дїамет. *ad*.

$7 : 22 = 130^\circ : 408^\circ.57'' =$ окр. бол. кр. (256).

$408^\circ,\ 57''$

$\times 40^\circ$

$16342^\circ.80''$ квад. = повер. отрѣз. шар. (429)

$120^\circ \times 120^\circ = 14400^\circ = \overline{ef}^2.$

$14 : 11 = 14400^\circ : 11314^\circ\ 28'' =$ площ. круг. дїам. *ef* (261).

$16342^\circ.\ 80''.$

$11314^\circ.\ 28''.$

$27657^\circ.\ 08''$ квад. = цѣлой повѣр. отр. шар. *efa*

Другимъ образомъ

По звѣстной *as* и *es* сыщи *ae* (146), потомъ сыщи площадь круга радїуса *ae*, получишь поверьхность отрѣзка шара *eaf*

(429), а придавъ къ оной площадь круга дiаметра *ef* будетъ цѣлая поверьхность отрѣзка шара.

Слѣдст. Когда дана будетъ поверьхность отрѣзка шара *eaf* и высота *as*: то дiаметръ *ab* сыщется; ибо раздѣля поверьхность на высоту *as*, частное будетъ = окружности большаго круга дiаметра *ab*, а по окружности онаго сыщется дiаметръ *ab*.

431. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ ef и высотѣ as падающей на половину хорды ef, сыскать цѣлую поверьхность вырѣзка шара ezfa.*

ф. 300. *Рѣшен.* По предъидущей задачѣ сыскавъ дiаметръ *ab* опредѣли поверьхность отрѣзка шара *eaf*, безъ круга дiаметра *ef*; потомъ сыскавши поверьхность конуса *efz* (422): сложи съ поверьхностiю отрѣзка, получишь цѣлую поверьхность вырѣзка шара.

Прибав. Для сысканiя поверьхности каждаго правильнаго тѣла, надлежитъ прежде по извѣстному боку опредѣлить площадь одной его стороны, а потомъ умножить оную на число сторонъ окружающихъ оное тѣло, будешь имѣть поверьхность онаго.

О СОДЕРЖАНIИ ПОВЕРЬХНОСТЕЙ ТѢЛЪ.

432. *Опредѣл. Подобныя тѣла* называются тѣ, коихъ всѣ сходственныя углы равны

равны и притомЪ ограничиваются равнымЪ числомЪ подобныхЪ плоскостей, коихЪ сходственныя бока или ихЪ части пропорцїональны.

433. ТЕОРЕМА. *Поверьхности подобныхЪ конусовЪ, содержатся между собою какЪ квадраты сходственныхЪ боковЪ.*

Доказ. Пусть будутЪ подобные конусы No14
abc и def: то (положа окружность дїаметра ф.
$ac = x$, а окружность дїаметра $df = y$) 328
для подобїя конусовЪ $ab : de = ac : df$ 329.
(104) $= x : y$ (248); по сему $x : y = ab : de$ (ариф. 229), умножъ предѣидущїе члены чрезЪ ab, а послѣдующїя чрезЪ de, будетЪ $ab \times x : de \times y = \overline{ab}^{2} : \overline{de}^{2}$ (ариф. 235); потомЪ раздѣля члены перваго содержанїя на двѣ равныя части, будетЪ $\frac{ab \times x}{2} : \frac{de \times y}{2} = \overline{ab}^{2} : \overline{de}^{2}$; но $ab : de = ac : df$; также $\overline{ab}^{2} : \overline{de}^{2} = \overline{ac}^{2} : \overline{df}^{2}$ (ариф. 245), посему $\frac{ab \times x}{2} : \frac{de \times y}{2} = \overline{ab}^{2} : \overline{de}^{2} = \overline{ac}^{2} : \overline{df}^{2}$: но $\frac{ab \times x}{2}$ есть поверьхность конуса abc, а $\frac{de \times y}{2} =$ поверьхности конуса def (415), слѣдовательно поверьхности подобныхЪ конусовЪ какЪ квадраты сходственныхЪ боковЪ или дїаметровЪ основанїя.

Слѣдст. I. ИзЪ того видно, что вообще поверьхности какихЪ нибудь подоб-

добныхъ тѣлъ, содержатся между собою какъ какъ квадраты сходственныхъ боковъ. Ибо два подобные тѣла имѣютъ всѣ ихъ сходственныя стороны подобны, коихъ одинакїя бока пропорцїональны (432), и площади тѣхъ сторонъ содержатся между собою какъ квадраты сходственныхъ боковъ (275), слѣдовательно и сумма сторонъ, то есть поверхность одного тѣла къ поверхности другаго, какъ квадратъ бока одного, къ квадрату сходственнаго бока другаго тѣла. На примѣръ поверхность прямой пирамиды *abcd* будетъ къ поверхности пирамиды *fghi* =
No15 $\overline{dc}^2 : \overline{hi}^2$ или $\overline{bc}^2 : \overline{gh}^2$, потому что изъ по-
ф.
330 добныхъ треугольниковъ $dbc : hgi = \overline{dc}^2 : \overline{hi}^2$
331. или $\overline{bc}^2 : \overline{gh}^2$ (164), а умножа члены перваго содержанїя чрезъ 3 будетъ $3dbc : 3hgi = \overline{dc}^2 : \overline{hi}^2 = \overline{bc}^2 : \overline{gh}^2$ (ариф. 232), то есть поверхность пирамиды *abcd* къ поверхности пирамиды $fghi = \overline{dc}^2 : \overline{hi}^2 = \overline{bc}^2 : \overline{gh}^2$. Основанїе жъ $adc : fih = \overline{dc}^2 : \overline{hi}^2 = 3dbc : 3hig$ (ариф. 229), посему $3dbc + adc : 3hig + fih = \overline{dc}^2 : \overline{hi}^2$ или $\overline{bc}^2 : \overline{gh}^2$ (ариф. 241), то есть, и цѣлыя поверхности пирамидъ *abcd* и *fghi* какъ квадраты сходственныхъ боковъ.

ф. *Слѣдст.* Поверхности шаровъ какъ
332. квадраты ихъ радїусовъ или дїаметровъ. Ибо

Ибо (положа площадь большаго круга дїаметра $ab = x$ а площадь круга дїаметра $eq = y$) $x : y = \overline{ab}^2 : \overline{eq}^2$ (266), а умножа предъидущїе члены чрезъ 4 будетъ $4x : 4y = \overline{ab}^2 : \overline{eq}^2$ (ариф. 232) или $\frac{1}{4}(\overline{ab}^2)\, \overline{az}^2 : \frac{1}{4}(\overline{eq}^2)\, \overline{ez}^2$; но $4x =$ поверьхности шара дїаметра ab, и $4y =$ поверьхности шара дїаметра eq (227), слѣдовательно поверьхности шаровъ какъ квадраты радїусовъ или дїаметровъ.

434. ЗАДАЧА. *Извѣстна цѣлая поверьхность конуса $abc = 100179°, 56''$ и содержанїе наклоненнаго бока ab къ дїаметру $ac = 7 : 3$; сыскать бокъ ab, и дїаметръ ac.*

Рѣшен. положимъ что конусъ def есть такой коего дїаметръ $df = 3$ а наклоненной бокъ $de = 7$ частямъ. И такъ по дїаметру df, и наклоненному боку de надлежитъ сыскать цѣлую поверьхность онаго (422); и для подобїя конусовъ def и abc (432) сдѣлать слѣдующую пропорцїю: цѣлая поверьхность конуса def содержится къ поверьхности даннаго конуса abc какъ $\overline{df}^2 : \overline{ac}^2$ (433), $V\overline{ac}^2$ будетъ $=$ дїаметру ac, а наконецъ $3 : 7 = ac$ къ наклоненному боку ab, какъ явствуетъ изъ слѣдующаго примѣра: No14 ф.328 329.

Сысканная по (422) цѣлая повер. кон. $def =$ $40^{\circ}. 04''$.

$3 \times 3 = 9 = \overset{-2}{df}$.

$40^{\circ}. 04'' : 100179. 56'' = 9 : 22517^{\circ} =$ площ. квад. дїам. ac.

$\sqrt[2]{22517^{\circ}} = 150^{\circ} = ac$

$3 : 7 = 150^{\circ} : 350 =$ наклонен. боку ab.

Примѣч. Такимъ образомъ по извѣстнымъ поверьхностямъ и содержанїю боковъ, сыскиваются бока или данныя части призьмъ цилиндровъ и прочая.

435. ТЕОРЕМА. *Поверьхность прямаго цилиндра de къ площади основанїя df, какъ высота dh къ четверти дїаметра df.*

No13 ф. 291. *Доказ*. Положимъ что окружность круга дїаметра $df = y$, поверьхность цилиндра будетъ $= dh \times y$ (413), а площадь круга дїаметра $df = \frac{1}{4} df \times y$ (256); того ради будетъ $dh \times y : \frac{1}{4} df \times y = dh : \frac{1}{4} df$. Сїя пропорцїя справедлива потому, что произведенїе крайнихъ членовъ $\frac{1}{4} df \times dh \times y$ $=$ произведенїю среднихъ $\frac{1}{4} df \times dh \times y$ (ариф. 225).

436. ТЕОРЕМА. *Поверьхность прямаго конуса abv къ площади основанїя ab, какъ наклоненной бокъ bv къ радїусу bg.*

Доказ.

Доказ. ПоложимЪ окружность круга ф. 295.
дïаметра $ab = y$. Поверьхность конуса abv будетЪ $= \frac{1}{2}bv \times y$ (422), а площадь круга радïуса $bg = \frac{1}{2}bg \times y$ (256), по сей причинѣ $\frac{1}{2}bv \times y : \frac{1}{2}bg \times y = bv : bg$, причемЪ произведенïе крайнихЪ членовЪ $\frac{1}{2}bg \times bv \times y$ = произведенïю среднихЪ $\frac{1}{2}bg \times bv \times y$ (ариф. 29), слѣдовательно пропорцïя справедлива (ариф. 225).

Слѣдст. ИзЪ того явствуетЪ, что поверьхность прямаго конуса abv, котораго наклононной бокЪ av = дïаметру основанïя ab, вдвое больше своего основанïя; поелику наклоненной бокЪ av будетЪ вдвое больше радïуса ag; слѣдовательно цѣлая поверьхность такого конуса втрое больше площади круга основанïя.

437. ТЕОРЕМА. *Цѣлая поверьхность цилиндра cf описаннаго около шара z кЪ поверьхности онаго 3 : 2.*

Даказ. Ибо (положа площадь круга дïа- No15
метра cd или $ab = x$, поверьхность шара ф. 333.
будетЪ $= 4x$) поверьхность цилиндра cf безЪ основанïй содержится кЪ площади круга $x = ce : \frac{1}{4}cd$ (435); но высота ce вчетверо больше $\frac{1}{4}cd$ по положенïю, посему поверьхность цилиндра fc будетЪ $= 4x$; а придавЪ кЪ сей поверьхности площадь круга дïаметра cd и дïаметра ef, то есть $2x$, цѣлая поверьхность цилиндра будетЪ $= 6x$; слѣдственно $6x : 4x = 6 : 4$ или 3. 2.

Слѣдст. Цѣлая поверьхность цилиндра коего дїаметрЪ основанїя равенЪ высотѣ, вшестеро больше площади основанїя, поелику $6x$ = цѣлой поверьхности, а площадь основанїя = x.

438. ТЕОРЕМА. *Поверьхность отрѣзка шара gih кЪ поверьхности конуса ghi вЪ немЪ вписаннаго, какЪ бокЪ gh кЪ радїусу gn.*

Доказ. Ибо (положа площади круговЪ, радїуса $gh = x$, радїуса $gn = y$, поверьхность конуса
ф. 333. $ghi = z$) $x : y = gh \times gh : gn \times gn$ (266), также $y : z = gn : gh$ (436), а умножа члены одной пропорцїи на члены другой, будетЪ $xy : yz = gh \times gn \times gn : gn \times gn \times gh$ (ариф. 243), потомЪ раздѣля члены перваго содержанїя на y, втораго на $gh \times gn$, будутЪ частныя $x : z = gh : gn$ (ариф. 240): но x = поверьхности отрѣзка шара gih (429): слѣдственно поверьхность отрѣзка шара gih кЪ поверьхности конуса ghi или z какЪ $gh : gn$.

Слѣдст. Поверьхность отрѣзка шара $kghilk$ вдвое поврьхности равнобочнаго конуса khl вЪ немЪ вписаннаго; ибо тогда kh вдвое kp.

439. ТЕОРЕМА. *Поверьхность шара z кЪ цѣлой поверьхности равнобочного конуса qsr около шара описаннаго, какЪ $4 : 9$.*

Доказ. Понеже $qr = 2kl$ (208), посему $\overline{qr}^2 = 4\overline{kl}^2$, слѣдствено $\overline{kl}^2 : \overline{qr}^2 = 1 : 4$; но $\overline{kl}^2 : \overline{ab}^2 = 3 : 4$ (205), слѣдственно $\overline{ab}^2 : \overline{qr}^2 = 1 : 3$ (ариф. 250): также (положа площадь круга дїаметра $ab = x$, площадь круга дїаметра $qr = y$) будетЪ $\overline{ab}^2 : \overline{qr}^2 = x : y$ (266) $= 1 : 3$ (ариф. 229); но поверьхность шара вчетверо больше большаго

круга

круга x (427), а цѣлая поверьхность равнобочнаго конуса qsr втрое больше площади круга y, слѣдовательно сіи поверьхности, то есть $4x : 3y = 1 \times 4 : 3 \times 3 = 4 : 9$ (ариф. 236).

Слѣдст. I. Поверьхность конуса khl вписаннаго въ шарѣ, къ поверьхности шара какъ $9 : 16$. Ибо $\overline{kl}^2 : \overline{ab}^2 = 3 : 4$ (205), посему (положа площадь круга діаметра $kl = z$, площадь круга діаметра $ab = x$) $z : x = 3 : 4$ (256): но поверхность конуса khl втрое больше площадн основанія z, а поверьхность шара вчетверо больше большаго круга діаметра $ab = 4x$; того ради умножа предъидущіе члены чрезъ 3 а послѣдующіе чрезъ 4, будетъ $3z : 4x = 3 \times 3$ $4 \times 4 = 9 : 16$ (ариф. 236), то есть поверьхность конуса khl къ поверьхности шара какъ $9 : 16$.

Слѣдст. II. Цѣлая поверьхность равнобочнаго конуса khl вписаннаго въ шарѣ, къ поверьхности описаннаго qsr какъ $1 : 4$; ибо для подобія оныхъ, поверьхность конуса khl къ поверьхности конуса $qsr = \overline{kl}^2 : \overline{qr}^2$ (433) или $1 : 4$.

440. ТЕОРЕМА. *Ежели около шара $ahbm$ опишется цилиндръ, $cefd$ и равнобочной конусъ qrs, то поверьхности сихъ трехъ тѣлъ, будутъ содержатся между собою какъ* $\div$ **4 : 6 : 9.**

Доказ. Ибо (опредѣля поверьхность шара литерою z, поверьхность цилиндра Q, поверьхность конуса $= R$) $z : q = 2 : 3 = 4 : 6$ (437) $R : z = 9 : 4$ (439), а умножа члены одной пропорціи членами другой пропорціи, будетъ $Rz : qz = 36 : 24$. потомъ раздѣля члены перваго содержанія на z, а втораго содержанія на 4, частное $q : R = 6 : 9$; по сей причинѣ $\div Z : Q : R = \div 4 : 6 : 9$. ф. 333.

Слѣдст.

Слѣдст. Изъ сего видно, что поверьхность описаннаго цилиндра *cefd* есть средняя пропорцїональная между поверьхностїю шара и поверьхностїю описаннаго конуса.

О ИЗМѢРЕНИИ ТОЛСТОТЫ ТѢЛЪ.

441. *Опредѣл.* Величина тѣла есть мѣсто или опредѣленное пространство тѣломъ занятое.

442. ТЕОРЕМА. *Прямыя или наклоненныя призьмы и цилиндры имѣющїя равныя высоты и основанїя толстотою равны.*

ф. *Доказ.* Поелику толстота каждаго изъ
334 сихъ тѣлъ, состоитъ изъ толикаго чис-
335 ла безмѣрно тонкихъ параллельныхъ и
336. равныхъ основанїямъ слоевъ *mn*, (кои почесть можно за плоскости(сколько въ ихъ высотахъ *ef* имѣется точекъ, но высоты *ef* между собою равны, слѣдовательно и сумма слоевъ каждаго тѣла, то есть толсты ихъ, равны между собою.

443. ТЕОРЕМА. *Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ призьмъ и цилиндровъ, имѣющихъ равную высоту, содержатся между собою какъ ихъ основанїя.*

Доказ. Ибо въ разсужденiи одинакой высоты ef, каждое изъ сихъ тѣлъ имѣетъ одинакое число равныхъ основанiямъ слоевъ; и такъ положа что основанiе призьмы $dcf = A$, а основанiе ef цилиндра $cgef = B$, изъ коихъ на прим. A втрое больше B, будетъ каждой слой mn перваго, втрое больше каждаго слоя mn втораго тѣла; того ради и сумма слоевъ перваго тѣла, то есть толстота призьмы de, втрое больше суммы слоевъ втораго тѣла, то есть толстоты цилиндра $cgef$; по сему $de : cgef = 3 : 1$, но $A : B = 3 : 1$ по положенiю, слѣдовательно и $de : cgef = A : B$, то есть толстота призьмы de къ толстотѣ цилиндра $cgef$ какъ основанiе dfc къ основанiю cf. ф. 335. ф. 336.

Слѣдст. Того ради ежели въ кубѣ или четверосторонной призьмѣ adg напишется цилиндръ $acdb$; то будетъ тольстота онаго къ толстотѣ куба или призьмы, какъ площадь основанiя цилиндра къ квадрату дiаметра ab: но площадь круга основанiя къ квадрату дiаметра ab, какъ четверть окружности къ дiаметру, или по Архимедову содержанiю 11 : 14, а по Мецiеву 355 : 452 (261); слѣдовательно толстота цилиндра къ толстотѣ куба adg или призьмы около онаго описанной какъ 11 : 14 или 355 : 452. ф. 345.

444.

444. *Опредѣл.* Для измѣренiя тѣлъ, берутся также тѣла опредѣленной величины за единицу какъ то, *кубическая сажень*, *кубической футъ*, *дюймъ* и проч.

Примѣч. Кубическая сажень есть кубъ котораго каждое измѣренiе въ длину, ширину и высоту по сажени. Кубической футъ есть кубъ коего всѣ три измѣренiя по футу и проч.

Слѣдст. Изъ предъидущаго опредѣленiя и примѣчанiя ясно видимъ, что толстота тѣла въ 100 кубическихъ футъ, должна занять такое пространство, которое бы сотью кубическими футами точно было наполнено.

445. ТЕОРЕМА. *Толстота куба abde равна произведенiю изъ бока af или cf самаго на себя умноженнаго два раза.*

ф. 337. *Доказ.* Положимъ что кубъ *abde* есть кубическая сажень, котораго бокъ $fc = ab$ раздѣлится на 7 равныхъ частей, изъ коихъ пусть будетъ $bo = qc = \frac{1}{7} fc$ чрезъ точку *q* и *o* разрѣжъ кубъ плоскостiю *op* параллельною основанiю *ae* или *bd*; отсѣченная часть *qbd*, будетъ седьмая часть куба *abde*. Раздѣли и бокъ *cd* на столько жъ равныхъ частей что бы *hc* была $= \frac{1}{7}$ *cd*, чрезъ точку *h* разрѣжъ плоскостiю параллельною плоскости *bf*, будетъ *hqb* потой же причинѣ седьмая часть тѣла *qbd*, то

есть

есть 49 я часть куба *abde*: такое жъ дѣленїе сдѣлай на бокѣ *bc* что бы была *nc* $= \frac{1}{7}$ *bc*, и ежели чрезъ точку *n* плоскостїю параллельною боку *fd* пересѣчется кубъ *abde*: то тремя сими сѣченїями отдѣлится кубъ, то есть кубической футъ *nhq* седьмая часть тѣла *hqb*, 49 я часть тѣла *qbd* и 343 я часть куба *abde*; по сему 343 куба равныхъ кубу *nhq*, наполняютъ пространство куба *abde*; слѣдовательно бокъ куба *cf* умноженной самъ собою два раза, то есть $7' \times 7' \times 7 = 49'' \times 7' = 343'''$ кубическихъ футовъ, равны толстотѣ куба *abde*.

Примѣч. Подобными сѣченїями можно найти десятую сотую и тысячную часть того же куба *abde*. Также сыщется сотая и тысячная часть куба *nqh*, то есть десятитысячная, стотысячная и миллїонная, часть всего куба *abde* и далѣе.

Слѣдст. Изъ сего явствуетъ что россїйская кубическая сажень въ разсужденїи геометрическаго раздѣленїя содержитъ въ себѣ 1000 кубическихъ футовъ, футъ 1000 кубическихъ дюймовъ и такъ далѣе; въ разсужденїи жъ употребительнаго раздѣленїя, содержитъ $7 \times 7 \times 7 = 343^{\circ}$ кубическихъ футовъ, а кубической футъ $12 \times 12 \times 12 = 1728$ кубическихъ дюймовъ и проч. *

* По сей причинѣ толстоту куба означать будемъ чрезъ $\overline{ab}^3$, при чемъ надлежитъ выговоривать кубъ изъ линеи *ab*.

446. ТЕОРЕМА. *Толстота всякой призмы или цилиндра db равна произведенїю изъ основанїя A и высоты ab.*

Доказ. Положимъ что изъ высоты ab
ф. 338. сдѣланъ кубъ ac : то въ разсужденїи одинакой высоты ab, будетъ основанїе куба $\overline{af}^2$ или $\overline{ab}^2$ содержаться къ основанїю цилиндра A, какъ толстота куба $= \overline{ab}^3$ къ толстотѣ цилиндра dab (443), то есть $\overline{ab}^2 : A = \overline{ab}^3 :$

$$\frac{A \times \overline{ab}^3}{\overline{ab}^2} = A \times ab = \text{толстотѣ цилиндра}$$

dab; но $A =$ площади основанїя, $ab =$ высотѣ цилиндра db, слѣдовательно толстота цилиндра db равна произведенїю изъ основанїя A и высоты ab.

Слѣдст. Изъ сего слѣдуетъ, когда площади основанїй двухъ призмъ или цилиндровъ будутъ въ обратномъ содержанїи ихъ высотъ; то оные тѣла толстотою равны. Ибо (положа площадь осно-
ф. ванїя dcf призмы $de = x$, а площадь
335 круга дїаметра cf цилиндра $cgef = z$) бу-
336. детъ $x : z = cg : ef$, при чемъ $x \times ef = z \times cg$ (ариф. 222); то есть толстота призмы $de =$ толстотѣ цилиндра $cgef$.

447. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку $co = 50'$ и высотѣ $ef = 120'$ призмы de, сыскать оной толстоту.* Рѣ.

Рѣшен. По извѣстному боку *co* сыщи площадь пятїугольника *cog* (250), которую умножа высотою *ef* получишь толстоту призьмы *de* (446). ф. 288.

Числами.

Сысканная по (250) площ. пятїуг. *cog* = 4250'' квад. фут.

4250'' = *cofgd*
120, = *ef*
850
425

510000''' кубич. фут. = толст. призьмы *de*.

448. ЗАДАЧА. *По извѣстному дїаметру ab = 60' основанїя и высотѣ af = 100' цилиндра abef, сыскать онаго толстоту.*

Рѣшен. По дїаметру *ab* сыщи площадь круга, то есть площадь основанїя цилиндра, которую умножа высотою *af* получишь требуемую толстоту, то есть ф. 344.

Сысканная по (256) площ. круг. дїам. *ab* = 2828'' квад. фут.

2828'' = плоск. круг.
100' = *af*

282800''' куб. фут. = тол. цилин. *abef*.

449. ЗАДАЧА. *Толстота цилиндра acdb, коего дїаметръ основанїя ab равенъ высотѣ ac извѣстна 86893''', сыскать дїаметръ ab.*

Рѣшен. Сдѣлай слѣдующую пропорцїю;
ф. 345. 11 : 14 или 355 : 452, такъ толстота цилиндра *acdb* къ толстотѣ куба дїаметра *ab* (443), котораго кубической корень будетъ равенъ дїаметру *ab*, то есть

$$11 : 14 = 86893''' : 110591''' = \overline{ab}^{3}$$

$$\sqrt[3]{110591} = 48' = \text{дїаметр. } ab.$$

450. ТЕОРЕМА. *Прямыя или наклоненныя пирамиды и конусы имѣющїе равныя высоты и основанїя, толстотою равны.*

Доказ. Для изслѣдованїя сего, возмемъ
ф. въ доказательство пирамиду стоящую съ
339 конусомъ на одной плоскости, коихъ вы-
340. сота *eg* и *eg* равныя; и ежели представимъ себѣ что оныя пересѣчены плоскостїю *qq* параллельною ихъ основанїямъ: то сѣченїи *orh* и *ph* будутъ равны между собою. Ибо основанїе *acd* подобно сѣченїю *orh* и всѣ бока одной параллельны сходственнымъ бокамъ другой фигуры; также *sd* параллельна *th*, посему треугольникъ *sed* подобенъ *eth*, треугольникъ *seg* подобенъ *tef*; чего для $sd : th = se : te = ge : fe$ (104), изъ подобныхъ же треугольниковъ *ged* и *feh* конуса *aed*, $ge : fe = gd : fh$, и такъ для равенства содержанїй будетъ $sd : th = gd : fh$, и $\overline{sd}^{2} : \overline{th}^{2} = \overline{gd}^{2} : \overline{fh}^{2}$ (ариф. 245), изъ подобныхъ же фигуръ $acd : orh = \overline{sd}^{2} : \overline{th}^{2}$

(265); а положа площадь круга дїаметра $ad = x$, площадь круга дїаметра $ph = z$, будетъ $x : z = \overline{gd}^2 : \overline{fh}^2$; слѣдственно по причинѣ равенства содержанїй $acd : orh = x : z$; но $acd = x$ по положенїю, посему $orh = z$. Такимъ же образомъ докажется, равенство всѣхъ прочихъ соотвѣтствующихъ слоевъ оныхъ тѣлъ; слѣдственно пирамида $aced$ съ конусомъ aed имѣющїя равныя высоты, состоятъ изъ одного числа между собою равныхъ и своимъ основанїямъ подобныхъ слоевъ, слѣдовательно толстотою равны.

451. ТЕОРЕМА. *Толстоты прямыхъ и наклоненныхъ пирамидъ и конусовъ, имѣющихъ равную высоту, содержатся между собою какъ ихъ основанїя.*

Доказ. Ибо въ разсужденїи равной высоты eg, каждое изъ сихъ тѣлъ имѣетъ равное число подобныхъ основанїямъ слоевъ; и такъ положа что основанїе bcd пирамиды $aeb = A$, а основанїе amd конуса $aed = x$, площадь круга дїаметра $pn = z$, будетъ по предъидущей теоремѣ каждой сходствующїй слой $orh : z = A : x$; того ради и сумма всѣхъ слоевъ, то есть толстота пирамиды aeb къ суммѣ всѣхъ слоевъ, то есть къ толстотѣ конуса aed, какъ основанїе A къ основанїю x (ариф. 241).

452. ТЕОРЕМА. *Толстота всякой пирамиды abd, или конуса aed, равна произведе-*

веденію изъ площади основанія и одной трети высоты de.

Доказ. Представимъ себѣ что слѣланъ
ф. кубъ fhm коего высота $gh = fg$ вдвое
высоты de пирамиды abd. толстота сего
341 куба будетъ состоять изъ шести равныхъ
342. между собою пирамидъ $pnfog$, $mkhpl$ и проч. коихъ верьхи сообщаются въ цѣнтрѣ p, а основаніе каждой пирамиды есть квадратъ опредѣляющей сторону куба fh или fo (396); по сему высота pq пирамиды $pnfog = \frac{1}{2}gh = \frac{1}{2}fg =$ высотѣ de пирамиды adb по положенію. И такъ толстота куба fhm будетъ равна $fg \times fg \times fg = \overline{fg}^3$ или $2de \times 2de \times 2de = 8\overline{de}^3$ (445); посему толстота одной изъ равныхъ пирамидъ $pnfgo = \frac{8\overline{de}^3}{6} = \frac{4\overline{de}^3}{3}$: но толстоты пирамидъ имѣющихъ равныя высоты содержатся какъ ихъ основанія; по сей причинѣ $fg \times fg = \overline{fg}^2$ или $2de \times 2de = 4\overline{de}^2$, то есть площадь основанія пирамиды npg къ площади основанія acb пирамиды $adbc$, содержится какъ толстота пирамиды $\frac{4\overline{de}^3}{3}$ къ толстотѣ пирамиды $adbc$ (451), то есть $4\overline{de}^2 : acb = \frac{4\overline{de}^3}{3} : adbc$, которой толстота по умноженіи втораго члена третьимъ и раздѣля на первой будетъ $= acb \times \frac{4\overline{de}^3}{3} : 4\overline{de}^2 = acb \times \frac{de}{3}$ (ариф. 254): но acb есть

есть площадь основанія, и $\frac{de}{3} = \frac{1}{3}$ высоты пирамиды *adbc*, слѣдовательно толстота $acb \times \frac{de}{3}$ пирамиды *adbc*, равна произведенію изъ основанія и одной трети высоты *de*.

Слѣдст. Изъ сего ясно видно, что всякая призьма *af* будетъ втрое больше пирамиды *agcb*, которая имѣетъ съ оною равное основаніе *acb* и высоту *gd*. ф.
Ибо толстота призьмы *af* равна произве- 343.
денію, изъ площади основанія *acb* высотою *gd* умноженнаго; а толстота пирамиды *agcb* равна произведенію той же площади основанія *acb*, одною третью высоты *gd* умноженнаго; слѣдовательно первое произведеніе втрое больше втораго, то есть толстота призьмы втрое больше пирамиды. Тожъ должно разумѣть что и ци- ф.
линдръ *abef* будетъ втрое больше конуса 344.
adb имѣющаго съ нимъ равное основаніе *acb* и высоту *cd*.

453. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку ab = 30′ основанія abc и наклоненному боку ad = 70′, трехсторонной пирамиды adb, сыскать оной толстоту.*

Рѣшен. По данному боку *ab* равносторонняго треугольника *abc* сыщи радіусъ ф.
ae (206), потомъ по радіусу *ae* 341.
и наклоненному боку *ad* сыщи высоту *de* (147), а наконецъ сыскавъ площадь рав-

носторонняго треугольника abc умножь оную чрезъ одну треть высоты de, получишь желаемую толстоту.

Числами.

$$70' \times 70' = 4900' = \overline{ad}^2$$

$$30' \times 30' = 900' = \overline{ab}^2 \cdot \frac{900}{3} = 300'' = \tfrac{1}{3}\overline{ab}^2 = \overline{ae}^2$$

$$4600'' = \overline{ad}^2 - \overline{ae}^2 = \overline{de}^2.$$

$$\sqrt[2]{4600'} = 678'' = de$$

сысканная площ. $\triangle abc = 38850'^{V}$ квад. дюй.

$$\frac{678''}{3} = \frac{226''}{23310} = \tfrac{1}{3}de$$

7770

7770

$8.780100'^{V}$ = тол. пир. $adbc$.

Примѣч. Такимъ же образомъ образомъ сыщется толстота всякой пирамиды.

454. ЗАДАЧА. *По извѣстнымъ, дiаметру основанiя* $ad = 60'$ *и наклоненному боку* $ae = 100'$ *прямаго конуса* aed, *сыскать онаго толстоту.*

Рѣшен. По радiусу ag и наклоненному ф. 340. боку ae сыщи высоту ge (147), потомъ сыскавъ площадь круга дiаметра ad, умножь оную одною третью высоты ge; произведенiе будетъ требуемая толстота конуса aed (449)., то есть

100'

$100' \times 100' = 10000' = \overline{ae}^2 .\ \frac{60}{2} = 30' = \frac{1}{2}ad = ag.$

$30' \times 30' = 900'' = \overline{ag}^2$

$9100'' = \overline{ae}^2 - \overline{ag}^2 = \overline{eg}^2.$

$\sqrt[2]{9100''} = 95' = eg.$

сысканная по (256) площ. круг. $= 2828''$.

$2828' \times \frac{95'}{3} = 89553$ куб. фут. $=$ тол. кон. aed.

Слѣдст. Ежели будетъ извѣстна толстота конуса aed и высота ge, то дїаметръ основанїя ad сыщется; ибо раздѣля толстоту конуса aed, на одну треть высоты ge, частное будетъ равно площади круга дїаметра ad, а по площади онаго найдется дїаметръ ad (262).

455. ТЕОРЕМА. *Площадь прямоугольника изъ двухъ какихъ нибудь линѣй ag и am есть средняя площадь между квадратами тѣхъ же линѣй.*

Доказ. Должно доказать что $\overline{ag}^2 : ag \times am = ag \times am : \overline{am}^2$, справедливость сей пропорцїи видна изъ того, что произведенїе крайнихъ $\overline{ag}^2 \times \overline{am}^2 =$ произведенїю среднихъ $ag \times ag \times am \times am = \overline{ag}^2 \times \overline{am}^2$ (ариф. 225). ф. 346.

456. ЗАДАЧА. *сыскать среднюю геометрическую площадь между двухъ какихъ нибудь правильныхъ многоугольниковъ имѣющихъ одно число боковъ.*

Рѣшен. Сдѣлай прямоугольникъ mg, котораго бы основанїе am, было равно окружности правильна- ф. 346.

то многоугольника bck, а высота ag равна половинѣ высоты fh подобнаго многоугольника del; то оной прямоугольникъ будетъ желаемая средняя площадь между показанныхъ многоугольниковъ.

Доказ. Когда положимъ что окружность многоугольника bck равная $am = x$, высота $np = y$, окружность многоугольника $del = v$, а высота $fh = z$, высота ag прямоугольника $gm = \frac{z}{2}$; то будетъ $x : v = y : z$ (248), причемъ $x \times z = v \times y$ (ариф. 222), площадь же многоугольника $bck = \frac{1}{2} x \times y$, площадь многоугольника $del = \frac{1}{2} v \times z$ (249), а площадь прямоугольника $mg = \frac{1}{2} z \times x$ (133); того ради будетъ $\frac{1}{2} x \times y : \frac{1}{2} x \times z = \frac{1}{2} x \times z : \frac{1}{2} v \times z$; ибо произведеніе крайнихъ $\frac{x \times z \times v \times y}{4}$ равно произведенію среднихъ $\frac{x \times z \times x \times z}{4}$, потому что $v \times y = x \times z$ докажется изъ предписанной пропорціи, и $x \times z = x \times z$; слѣдовательно прямоугольникъ mg есть средняя геометрическая площадь между правильными многоугольниками bck и del.

Слѣдст. Такимъ же образомъ сыщется средняя площадь между двухъ круговъ; ибо круги ни что иное, какъ правильные многоугольники имѣющіе безконечное число боковъ. И такъ для сысканія средней площади числами, должно окружность одного многоугольника, умножить половиною перпендикуляра отъ центра другаго многоугольника; а для сысканія средней площади между двухъ круговъ, окружность одного половиною радіуса другаго круга.

457. ЛЕММА. *Разность двухъ кубовъ* $edgbe$ *и* $kpln$, *равна тремъ призъмамъ, изъ коихъ основанѣе первой квадратъ бока большаго куба; другой, основанѣе прямоугольникъ составлен-*

составленной изъ боковъ большаго и меньшаго куба; третїй, основанїе квадратъ бока меньшаго куба, а высота каждой изъ сихъ призьмъ равна разности боковъ тѣхъ же кубовъ.

Доказ. Положимъ что изъ куба $edge$ вырѣзать должно кубъ $kplk$, коего бокъ $kf = ki = fp$; того ф.
ради чрезъ точку k, разрѣжъ кубъ $edge$ плоскостїю параллельною его сторонѣ ah или dg, отсѣченная часть $esve$ будетъ призьма, которой основанїе $abhe$ $=$ квадрату бока ae большаго куба, а высота $ek = ef - fk =$ разности боковъ большаго и меньшаго куба. Чрезъ точку l оставшее тѣло $kdgk$ разрѣжъ плоскостїю $ilrq$ параллельною сторонѣ fs или cv; отсѣченная часть $irgi$ будетъ призьма, имѣющая основанїе прямоугольникъ $iqrl$ составленной изъ бока $lr = ef$ большаго куба, и бока il меньшаго куба, а высоту $lg = fg - fl = ef - fk =$ разности боковъ обоихъ кубовъ; и ежели чрезъ точку p оставшее тѣло $kdlq$ разрѣжется плоскостїю параллельною сторонѣ kl меньшаго куба; то отдѣлится призьма $odmq$, которой основанїе om есть квадратъ бока меньшаго куба, а высота $dp = fd - fp = ef - kf =$ разности боковъ тѣхъ же кубовъ; слѣдовательно сумма сихъ трехъ призьмъ, равна разности двухъ кубовъ $edge$ и $kpln$. И такъ есть-ли положимъ что большаго куба бокъ $ef = x$, меньшаго куба $kf = z$, разность боковъ сихъ кубовъ $ek = ef - kf = x - z$: то будетъ толстота первой призьмы $esve = x^2 \times (x - z)$, толстота другой $irgi = x \times z \times (x - z)$; толстота третїй призьмы $odmq = z^2 \times (x - z)$, коихъ сумма вообще равна $x^2 \times (x - z) + x \times z \times (x - z) + z^2 \times (x - z)$

$=$

$= (x^2 + x \times z + z^2) \times (x - z) = x^3 - z^3$, то есть равна разности кубовъ *edge* и *kpln*.

458. **ТЕОРЕМА.** *Толстота отрѣзной пирамиды acge равна произведенїю, изъ суммы плоскостей двухъ квадратовъ ac и eg съ среднею геометрическою плоскостїю между тѣхъ же квадратовъ и одной трети высоты ik.*

Доказ. Продолжи бокъ *ae* и ось *ik*, кои взаимно пересѣкутся въ точкѣ *n*, проведи *el* параллельно оси
ф. 297. *ki*, будетъ треугольникъ *abi* подобенъ *efk*, по сему положа бокъ $ab = x$, бокъ $ef = z$, высоту $ki = el = y$; будетъ $x : z = ai : ek$ или *li*, и $x - z : x = (ai - li)\ al : ai$, также $x - z : z = (ai - li)\ al : ek$; въ разсужденїи жъ подобства треугольниковъ *ael*, *ain* и *ekn*, будетъ $al : ai = y : in$ и $al : ek = y : kn$ (104); по сему для равенства сихъ содержанїй съ первыми будетъ $x - z : x = y$ къ высотѣ *in*, которая по умноженїи втораго члена третьимъ и раздѣля на первой будетъ $= \frac{x \times y}{x - z}$; также $x - z : z = y$ къ высотѣ *kn*, которая въ семъ случаѣ будетъ равна $\frac{z \times y}{x - z}$. И такъ умножа площадь квадрата $ac = x^2$, одною третью высоты *in*, то есть чрезъ $\frac{x \times y}{(x - y)3}$, произведенїе $x^2 \times \frac{x \times y}{(x - z)3}$ будетъ $= \frac{x^3 \times y}{(x - z)3}$ равно толстотѣ пирамиды *acn* (452). А умножа площадь квадрата $eg = z^2$, одною третью высоты *kn* то есть чрезъ $\frac{z \times y}{(x - z)3}$, произве-

денїе

денїе $\overset{-2}{z} \times \frac{z \times y}{(x - z)3} = \frac{\overset{-3}{z} \times y}{x - z)3}$ равно толстотѣ пирамиды egn; которую вычтя изъ толстоты первой, останется толстота отрѣзной пирамиды $acge =$ $\frac{\overset{-3}{x} \times y - \overset{-3}{z} \times y}{(x - z)\,3} = (\frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{z}}{x - z}) \times \frac{y}{3}$: но по предъидущей леммѣ, $\overset{-3}{x} - \overset{-3}{z} = (\overset{-2}{x} + z \times x + \overset{-2}{z}) \times (x - z)$, а по раздѣленїи обѣихъ количествъ на $x - z$, частное $\frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{z}}{x - z}$ будетъ $= \overset{-2}{x} + z \times x + \overset{-2}{z}$; по сей причинѣ $\frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{z}}{x - z} \times \frac{y}{3} = (\overset{-2}{x} + x \times z + \overset{-2}{z}) \times \frac{y}{3} =$ толстотѣ отрѣзной пирамиды (ариф. 35); но $x \times z$ есть средняя площадь между $\overset{-2}{x}$ и $\overset{-2}{z}$, то есть между квадратами бока ab и ef (455), слѣдовательно толстота отрѣзной пирамиды $acge$, равна произведенїю изъ суммы площадей двухъ квадратовъ ac и eg съ среднею площадью между сихъ квадратовъ, умноженной одною третью высоты ik.

Слѣдст. Такимъ же образомъ докажется, что толстота всякой отрѣзной пирамиды, равна произведенїю суммы плоскостей большаго и меньшаго основанїя съ среднею площадью между оными, одною третью ея высоты умноженной.

459. ЗАДАЧА. *Въ прямостоящей отрѣзной пирамидѣ $acge$, дано большаго квадрата боку $ad = 80'$, меньшаго $= 20'$, наклоненному боку $ae = 120'$; сыскать толстоту оной.*

Рѣшен. Продолжи бокъ ae, и ось ki пока пересѣкутся въ n, проведи el параллельно

лельно оси ki, сыщи діогональ ac квадрата $abcd$, раздѣли оную на двѣ равныя части, частное будетъ $= ai$. Равнымъ образомъ сыщется и ek, вычти $ek = li$ изъ ai, останется al. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ael сыщи el (147), потомъ для подобныхъ треугольниковъ ael, ekn, и ain сдѣлай слѣдующую пропорцію: какъ разность al къ высотѣ el, такъ ek будетъ содержатся къ высотѣ kn; такъ же $al : el = ai$ къ высотѣ in. По извѣстной площади основанія $ehgf$ и высотѣ kn сыщи толстоту пирамиды egn, равнымъ образомъ и толстоту пирамиды acn (453); напослѣдокъ вычтя толстоту пирамиды egn изъ толстоты пирамиды acn, остатокъ будетъ требуемая толстота отрѣзной пирамиды $acge$.

Или выскавъ среднюю геометрическую площадь между основаніями пирамиды и сложа оную съ основаніями вмѣстѣ, умножъ сумму сихъ плоскостей одною третью высоты ki, получишь толстоту отрѣзной пирамиды $acge$ (458).

Числами.

$$800'' \times 800'' = 640000'^{IV} = \overline{ad}^2.$$

$$640000 \times 2 = 1280000'^{IV} = \overline{ac}^2$$

$$\sqrt{1280000'^{IV}} = 1131'' = ac.$$

$$\frac{1131''}{2} = 565'' = \tfrac{1}{2}ac = ai.$$

800''

$$200'' \times 200'' = 40000'^{v} = \overline{eh}^{2}$$

$$40000'^{v} \times 2 = 80000'^{v} = \overline{eg}^{2}$$

$$\sqrt{80000'^{v}} = 282'' = eg. \quad \frac{282''}{2} = 141'' = \tfrac{1}{2}eg$$

$$565'' = ai. \qquad\qquad = ek.$$

$$141'' = ek = li.$$

$$424'' = al.$$

$$1200'' \times 1200'' = 1440000'^{v} = \overline{ae}^{2}$$

$$424'' \times 424'' = 179776'^{v} = \overline{al}^{2}$$

$$1260224'^{v} = \overline{ae}^{2} - \overline{al}^{2} = \overline{el}^{2}.$$

$$\sqrt{1260224''} = 1122'' = el$$

$$al : el = ek : kn.$$

т. е $424'' : 1122'' = 141'' : 373'' = kn$

$$\frac{373''}{3} = 124'' = \tfrac{1}{3}\,kn.$$

$$al : el = ai : in.$$

т. е $424'' : 1122'' = 565'' : 1495'' = in.$

$$\frac{1495''}{3} = 498'' = \tfrac{1}{3}\,ni.$$

$$640000'^{v} \times 498'' = 318720000'^{v} = \overline{ad}^{2} \times \tfrac{1}{3}ni$$

= толс. пир. *acn*

$$40000'^{v} \times 124'' = 4960000'^{v} = \overline{eh}^{2} \times \tfrac{1}{3}kn$$

= толс. пир. *egn*.

$$318720000'^{v} - 4960000'^{v} = 313760000'^{v} =$$

тол. отрѣ. пир. *acge*.

Или

Или

$$800'' \times 800'' = 640000'^{v} = \overline{ad}^{2}$$

$$200'' \times 200'' = 40000'^{v} = \overline{eh}^{2}$$

$$800'' \times 200'' = 160000'^{v} = ad \times eh = \text{сре. гео. пл.}$$

840000'^v сумма плоскостей

$$\frac{1121''}{3} = 374'' = \tfrac{1}{3}el = \tfrac{1}{3}ki$$

3360000
5880000
2520000

314160000 = тол. отр. пир. *acge*.

Примѣч. Сїе послѣднее рѣшенїе сокращеннѣе и верьнѣе перваго, для того, что въ первомъ рѣшенїи при извлеченїи радиксовъ и прочихъ вычисленїи, много выпускается дробей, слѣдовательно въ первомъ случаѣ и толстота пирамиды опредѣляется меньше нежели должно

460. ТЕОРЕМА. *Толстота прямаго отрѣзнаго конуса abdc, равна произведенїю изъ суммы площадей двухъ круговъ ab и cd съ среднею геометрическою площадью между сихъ круговъ, одною третью оси ik умноженной.*

Доказ. Продолжи бокъ *ac* и ось *ik*, кои взаимно пересѣкутся въ точкѣ *h*, проведи *cm* параллельно
ф. 298. боку *db*, будутъ треугольники *acm*, *abh* и *cdh* подобны; чего ради положа дїаметръ $ab = x$, $cd = y$, ось $ik = cf = z$, будетъ $am = x - y : x = z$ къ высотѣ *ih*, которая по умноженїи втораго члена

треть-

третьимъ и раздѣля на первой будетъ $= \frac{x \times z}{x - y}$; также $x - y : y = z : \frac{y \times z}{x - y} = kh$. Умножь площадь круга дїаметра ab, то есть $\frac{11\overset{-2}{x}}{14}$ одною третью высоты ih, то есть чрезъ $\frac{x \times z}{(x - y)3}$, произведенїе $\frac{11\overset{-2}{x}}{14} \times \frac{x \times z}{(x - y)3} = \frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{x} \times z}{(x - y)3}$ будетъ равно толстотѣ конуса abh; также умножа площадь круга дїаметра cd, то есть $\frac{11\overset{-2}{y}}{14}$ одною третью высоты kh, то есть чрезъ $\frac{y \times z}{(x - y)3}$, произведенїе $\frac{11\overset{-2}{y}}{14} \times \frac{y \times z}{(x - y)3} = \frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{y} \times z}{(x - y)3}$ будетъ равно толстотѣ конуса cdh; которую вычтя изъ перваго, останется толстота отрѣзнаго конуса $abdc = \frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{x} \times z}{(x - y)3} - \frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{y} \times z}{(x - y)3} = \frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{y}}{x - y} \times \frac{z}{3}$; по предъидущей же теоремѣ $\frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{y}}{x - y} \times \frac{z}{3} = (\overset{-2}{x} + x.y + \overset{-2}{y}) \times \frac{z}{3}$, по сему $\frac{11}{14} \times \frac{\overset{-3}{x} - \overset{-3}{y}}{x - y} \times \frac{z}{3} = \frac{11}{14}(\overset{-2}{x} + x.y + \overset{-2}{y}) \times \frac{z}{3} = (\frac{11\overset{-2}{x}}{14} + \frac{11xy}{14} + \frac{11\overset{-2}{y}}{14}) \times \frac{z}{3} =$ толстотѣ конуса $abdc$; но $\frac{11xy}{14}$ есть средняя геометрическая площадь между двухъ круговъ $\frac{11\overset{-2}{x}}{14}$ и $\frac{11\overset{-2}{y}}{14}$ (456); слѣдовательно толстота отрѣзнаго конуса $abdc =$ произведенїю изъ суммы площадей двухъ круговъ ab и cd съ среднею геометрическою площадью между тѣхъ же круговъ на одну треть высоты ik.

461. ЗАДАЧА. *Въ прямомъ отрѣзномъ конусѣ abcd, по извѣстнымъ дiаметрамъ меньшаго cd = 20′, большаго круга ab = 50′ и высотѣ ki = 180′, сыскать онаго толстоту.*

Рѣшен. Продолжи ось *ik* и бокъ *ac* конуса *abdc* пока пересѣкутся въ точкѣ *h*, проведи *cf* параллельно оси *ik* и *cm* параллельно *db*. Дiаметръ *cd* вычти изъ *ab*, останется *am*. Для подобныхъ треугольниковъ *acm*, *abh* и *cdh* сдѣлай посылку, какъ разность *am* содержится къ высотѣ *cf*, такъ дiаметръ *ab* къ высотѣ *hi*; также *am* : *cf* = *cd* : къ высотѣ *hk*, потомъ сыщи толстоту конуса *abh*, и толстоту конуса *cdh* (454); вычтя послѣднюю изъ первой толстоты, получишь требуемую толстоту отрѣзнаго конуса *abcd*.

Или по извѣстнымъ дiаметрамъ *cd* и *ab* сыщи среднюю геометрическую площадь между двухъ круговъ, сложа оныя площади вмѣстѣ, умножь сумму сихъ плоскостей одною третью оси *ki*, произведенiе будетъ равно толстотѣ отрѣзнаго конуса *abcd*.

Числами.

50′ = *ab* 180′ = *ki* = *cf*.
20′ = *cd* = *mb*.

30′ = *am*.

am

$am : cf = ab : hi.$

$30' : 180' = 50' : 300' = hi.\ \frac{300}{3} = 100' = \frac{1}{3}hi$

$30' : 180' = 20' : 120' = hk.\ \frac{120}{3} = 40' = \frac{1}{3}hk$

$14 : 11 : = (50' \times 50')\ 2500'' : 1964'' =$ площ. круг. дїа. ab.

$14 : 11 = (20' \times 20')\ 400'' : 314'' =$ площ. круг. дїа. cd.

$1964'' \times 100' = 196400''' =$ толст. кон. abh.

$314'' \times 40' = 12560''' =$ толст. кон. cdh.

$183840 =$ толс. отр. кон. $abdc$.

Или

$7 : 22 = 50' : 157' =$ окруж. кр. дїам. ab

$\frac{20}{2} = 10' = ck.\ \frac{10}{2} = 5' = \frac{1}{2}ck.$

$785 =$ сред. гео. пло. (456).

$1964 =$ пл. крг. дїам. ab

$314 =$ пл. круг. дїам. cd

$3063'' =$ суммѣ.

$\frac{180}{3} = 60' = \frac{1}{3}ki$

$183780''' =$ тол. отр. кон. $abdc$

вѣрнѣе перваго рѣшенїя.

462. ТЕОРЕМА. *Толстота шара afbd, равна произведенїю, его поверьхности одною третью радїуса ac умноженной.*

Доказ. Ибо шаръ можно признавать за тѣло составленное изъ неисчетнаго числа ф. 299.

равныхъ безмѣрно мѣлкихъ пирамидъ, какъ на прим. cxy, коихъ верьхи сообщаются въ центрѣ шара c, и всякая точка поверьхности шара есть основанiе пирамиды *, посему радiусъ шара можно почитать безъ чувствительной погрѣшности общею ихъ высотою: но какъ число сихъ пирамидъ равно числу точекъ составляющихъ поверьхность шара; того ради толстота онаго равна суммѣ толстотъ всѣхъ тѣхъ пирамидъ, толстота жъ каждой изъ сихъ пирамидъ равна произведенiю ея основанiя одною третью радiуса шара умноженнаго, слѣдовательно и сумма ихъ толстотъ, то есть толстота шара, равна произведенiю изъ суммы ихъ основанiй, то есть поверьхности шара одною третью радiуса $cy = ac$ умноженной.

Слѣдст. I. Толстота шара равна произведенiю изъ площади большаго круга шара чрезъ двѣ трети дiаметра ab. Ибо (положа площадь круга дiаметра $di = z$) поверь-

---

* Въ разсужденiи правильности сферической фигуры; можно тѣ точки или мнимыя основанiя пирамидъ полагать за правильные многоугольники безмѣрно малые, между собою равные, кои должны быть или равносторонные треугольники, либо квадраты или шестiугольники; ибо только таковые правильные многоугольники могутъ имѣть своихъ боковъ по два общими не оставляя въ сомкнутiи никакой полости (410).

поверьхность шара будетъ $= 4z$ (427), которую умножа чрезъ $\frac{1}{3}cd$ или $\frac{1}{6}ab$, произведенїе по предъ идущей теоремѣ будетъ $= \frac{4z \times ab}{6} = z \times \frac{2}{3} ab =$ толстотѣ шара.

Слѣдст. II. Толстота шара равна толстотѣ пирамиды или конуса, коего основанїе равно поверьхности а высота радїусу шара. Также равна толстотѣ пирамиды или конуса коего основанїе $=$ площади большаго круга, а высота вдвое дїаметра шзра ab.

Слѣдст. III. Толстота цилиндра $cefd$ около шара описаннаго, къ толстотѣ онаго какъ 3 : 2. Ибо изъ перваго слѣдствїя видно что толстота шара $= \frac{2}{3} ab \times z$: но кругъ дїаметра $ab =$ кругу дїаметра $cd = z$; того ради толстота цилиндра $ecdf = z \times (df) ab$ (446); слѣдовательно толстота описаннаго цилиндра къ толстотѣ шара, какъ $z \times ab : \frac{2}{3} ab \times z = 1 : \frac{2}{3} = 3 : 2$ или 6 : 4 (ариф. 223). No.15 ф. 333.

Слѣдст. IV. Изъ послѣдняго слѣдствїя видно что толстота шара $= \frac{2}{3}$ описаннаго цилиндра $cefd$.

Слѣдст. V. Толстота шара вдвое толстоты конуса cdh имѣющаго основанїе равно площади большаго круга или основанїю описаннаго цилиндра, а высоту равну дїаметру тогожъ шара или высотѣ цилиндра $cefd$. Ибо конусъ chd есть одна треть описаннаго цилиндра $cefd$; по сей причинѣ толстота конуса chd къ толстотѣ цилиндра $cefd$ какъ 1 : 3;

но толстота шара дiаметра ab, къ толстотѣ цилиндра $cefd$ какъ 2 : 3, слѣдовательно толстота шара дiаметра ab, къ толстотѣ конуса chd = 2 : 1 (ариф. 250).

463. ЗАДАЧА. *По дiаметру $id = 80'$, сыскать толстоту шара $aibd$.*

No 13 *Рѣшен.* По дiаметру id сыщи поверь-
ф. хность шара (428), умножь оную чрезъ
299. $\frac{1}{3}$ радiуса cd; или сыскавъ площадь круга дiаметра id умножь оную двумя третьми дiаметра di, получишь требуемую толстоту шара, то есть

$80' \times 80' = 6400'' = \overline{id}^2$.

$14 : 11 = 6400'' : 5028'' =$ площ. кр. дiа. id.

$5028'' \times 4 = 20112'' =$ поверьх. шара.

$\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2} id. = cd.\ \frac{40'}{3} = \frac{1}{3} cd.$

$20112'' \times \frac{40'}{3} = 268160''' =$ тол. шар. $acbd$.

464. ЗАДАЧА. *По данной хордѣ $ef = 80'$, радiусу $ze = 50'$; сыскать толстоту (сектора) вырѣзка шара $aizf$*

Рѣшен. Раздѣли хорду ef пополамъ. Въ
ф. прямоугольномъ треугольникѣ esz сыщи
300. sz (147); вычти оную изъ радiуса az, получишь высоту as; потомъ сыскавъ поверьхность отрѣзка шара $eafe$ (430), умножь оную одною третью радiуса ez или az, получишь толстоту вырѣзка шара $aezf$.

Числами

Числами

$\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2}\,ef = es.$

$50' \times 50' = 2500'' = \overline{ez}^2.$

$40' \times 40' = 1600'' = \overline{es}^2.$

$900'' = \overline{ez}^2 - \overline{es}^2 = \overline{sz}^2$

$\sqrt{900''} = 30' = sz.$ $50' = ez = az$

$30' = sz.$

$50' \times 2 = 100' =$ дїа. $ab.$ $20' = az - sz = as.$

$7 : 22 = 100' : 314' =$ окру. круг. дїам $ab.$

$\times\ 20' = as$

$6280' =$ повер. част. шар. $efa.$

$6280'' \times \frac{50'}{3} = 104666''' =$ толс. вырѣз. $ezfa.$

Доказ. Понеже вырѣзокъ шара $eafz$ равно какъ и шаръ состоитъ изъ неисчетнаго числа пирамидъ, коихъ верьхи сходятся въ центрѣ z и основанїе каждой есть точка поверьхности части шара, а радїусъ az общая высота сихъ пирамидъ; по сему толстота вырѣзка шара равна суммѣ толстотъ всѣхъ пирамидъ составляющихъ оное тѣло; но толстота каждой пирамиды равна произведенїю ея основанїя одною третью радїуса az умноженнаго; слѣдовательно сумма сихъ толстотъ, то есть толстота вырѣзка шара, равна произведенїю изъ суммы ихъ основанїй, то есть поверьхности отрѣзка шара умноженной одною третью радїуса az.

ф. 301. Слѣдст. Изъ сего видно что толстота вырѣзка шара = конусу коего площадь основанiя = площади круга дiаметра eg, а высота радiусу; ибо кругъ eg = поверьхности отрѣзка шара.

465. ЗАДАЧА. *По извѣстной хордѣ $ef = 80'$ и высотѣ $as = 20'$, сыскать толстоту отрѣзка шара $aesf$.*

ф. 301. Рѣшен. Хорду ef раздѣли на двѣ равныя части. Въ прямоугольномъ треугольникѣ ase сыскавши площадь квадрата дiогонали ae (144) раздѣли оную на высоту as, получишь дiаметръ ab, потомъ умножь площадь квадрата линѣи ae чрезъ 4, произведенiе будетъ равно площади квадрата дiаметра eg, сдѣлай слѣдующую пропорцiю; $14 : 11 = \overline{eg}^2 :$ къ площади круга дiаметра ge (261), которая будетъ равна поверьхности отрѣзка шара; умножь сiю площадь одною третью радiуса az, получишь толстоту вырѣзка $aezf$; потомъ вычти высоту as изъ радiуса az, останется высота sz конуса efz; напослѣдокъ по извѣстной высотѣ sz и дiаметру основанiя ef, сыскавъ толстоту конуса efz (454), вычти оную изъ толстоты вырѣзка шара $aezf$, останется требуемая толстота отрѣзка шара.

Числами

$\frac{80'}{2} = 40' = \frac{1}{2}ef = es$

$40' \times 40' = 1600'' = \overline{es}^2$

$20' \times 20' = 400'' = \overline{as}^2$

$2000'' = \overline{as}^2 + \overline{es}^2 = \overline{ae}^2$

$\frac{2000}{20} = 100' = \frac{\overline{ae}^2}{as} = ab.$

$2000'' \times 4 = 8000'' = 4\overline{ae}^2 = \overline{ge}^2.$

$14 : 11 = 8000'' : 6285''$ = плос. кру. дїа. eg
= поверьх. отрѣ. шар. aef.

$6285''$ = поверьх. част. шар. aef.

$50' = az$

3) 314250 (104750‴ = толст. выр. шар. $aezf$.

$50' - 20' = 30' = az - as = sz$ = выс. кон. efz.

$80' \times 80' = 6400'' = \overline{ef}^2$

$14 : 11 = 6400'' : 5028''$ = пл. кр. дїа. ef.

$5028'' \times \frac{30}{3} = 50280'''$ = толс. кон. ezf

104750‴ = толс. вырѣз. $aezf$

50280 = толст. кон. efz

54470 = толс. отрѣз. шара $aesf$.

466. ЗАДАЧА. *По даннымъ дїаметрамъ ab, cd параллельныхъ круговъ и высотѣ $ef = ag$, сыскать толстоту части шара $cabdc$.*

Рѣшен. и Доказ. Радїусъ ae вычти изъ радїуса ef, останется cg, и $cd - cg = gd$. Въ треугольникѣ agd по извѣстной ag и gd сыщется ad. ф. 302. а въ прямоугольномъ треугольникѣ agc по извѣстной ag и cg найдется ac (146); потомъ сыщи радїусъ круга ah описаннаго около треугольника acd чрезъ слѣдующую пропорцїю; $ag : ad = ac$ къ дїаметру ak, которой раздѣля пополамъ частное будетъ

будетъ равно радiусу $ah = dh$. Въ прямоугольномъ треугольникѣ aeh, по извѣстной ae и ah сыщи he (147), вычти he изъ hm, останется em, $em + ef =$ высотѣ mf. Наконецъ сыскавъ толстоту отрѣзка шара $cambdc$, и толстоту отрѣзка шара $amba$ (465), вычти послѣднюю изъ первой толстоты, останется требуемая толстота части шара $cabdc$.

467. ЗАДАЧА. *По даннымъ дiаметрамъ ab, cd и высотѣ fb, сыскать толстоту цилиндра $abfe$ имѣющаго цилиндрическую полость $cdhg$.*

Рѣшен. и Доказ. По дiаметрамъ ef и
No15 gh сыщи площади круговъ ef и gh. Пло-
ф. щадь круга дiаметра gh вычти изъ пло-
348. щади круга дiаметра ef, остатокъ будетъ равенъ площади кроны p, умножь оную высотою fb получишь требуемую толстоту полость имѣющаго цилиндра $abfe$ (446).

468. ЗАДАЧА. *По данному углу abh, 32 град. радiусу ab вырѣзка круга agh и высотѣ ac, сыскать толстоту вырѣзка $habedc$ цилиндра $agfc$.*

Рѣшен. Сыщи площадь вырѣзка abh
ф. круга ag (259), умножь оную высотою ac
349. получишь требуемую толстоту вырѣзка цилиндра $habedc$ (446).

469. ЗАДАЧА. *По даннымъ радiусу ac меньшаго вырѣзка acd, радiусу ef большаго*

большаго вырѣзка efg, углу $acd = efg =$ 40° и наклоненному боку ae, сыскать толстоту вырѣзка отрѣзнаго конуса abke.

Рѣшен. Продолжи бокъ *ea* и ось *fc*, пока взаимно пересѣкутся въ *i*. Изъ *a* про- ф.
види *ah* въ параллель оси *if*, будетъ $eh =$ 350.
$ef - hf = ef - ac$, сыщи *ah* (147). Для подобія треугольниковъ *eha*, *eif* и *aci* сдѣлай слѣдующую пропорцію, $eh : ef = ah$ къ высотѣ *if* и $eh : ac = ah$ къ высотѣ *ic*; потомъ сыщи площадь вырѣзка *efg* (259), которую умножа одною третью высоты *if*, получишъ толстоту вырѣзка *eifg* конуса *eki*; также сыщи и толстоту вырѣзка *adci* конуса *abi* (449), вычти оную изъ толстоты перваго вырѣзка, остатокъ будетъ требуемая толстота вырѣзка *dacfge* отрѣзнаго конуса.

470. ЗАДАЧА. *Изъ средины цилиндра, abmk, вырѣзана часть qefhka и часть pefgxc отрѣзнаго конуса cdnx, коихъ радїусы ae, ce, xf, градусы угла $aeq = kfh$ и высота ef извѣстны, сыскать толстоту оставшагося тѣла acpqghxk.*

Рѣшен. Сыщи по (468) толстоту вырѣзка *qefhka* цилиндра *abmk*, потомъ сыщи толстоту ф.
вырѣзка *pefgxc* отрѣзнаго конуса *cdnx* (469), вычти 351.
оную изъ толстоты вырѣзка *qefhka* получишь желаемое.

471.

471. ЗАДАЧА. *Изъ средины отрѣзнаго конуса abih вырѣзана часть gdlmha и часть fdlonc цилиндра cekn, коихъ радiусы ad, cd и lh, градусы угла adg = hlm и высота dl извѣстны, сыскать толстоту оставшагося тѣла gacfcmhn.*

Ф. 352. Рѣшен. Сыщи по (469) толстоту вырѣзка gdlmha отрѣзнаго конуса abih, потомъ сыщи толстоту вырѣзка fdlonc цилиндра cekn (468), вычти оную изъ толстоты вырѣзка gdlmha по лучишь требуемую толстоту.

472. ЗАДАЧА. *По даннымъ частямъ ab, ad, cf, и af = fd = ec = eb сыскать толстоту призьматической пирамиды abcefd.*

Рѣшен. Чрезъ точки e и f разрѣжъ
Ф. пирамиду abcefd плоскостьми перпендику-
353. лярными къ основанiю ac, коими отдѣлятся, трехсторонная призьма ghlkef, которой основанiе треугольникъ hgf или lke, а высота ef, и двѣ равныя пирамиды ahgfd и lbcek, коихъ основанiя равные прямоугольники ag и lc, а высота fn = em. И такъ для разрѣшенiя требуемаго, сыщи высоту fg или fh трапецiи dcef или abef (160), потомъ по извѣстнымъ бокамъ (hg) ad, hf = fg равнобедреннаго треугольника hfg сыскавъ площадь (154) умножь оную высотою ef или gk, произведенiе будетъ равно толстотѣ призьмы ghlkef (447), вычти ef изъ dc останется dg + kc. Сей

остатокъ

остатокъ раздѣли на двѣ равныя части, частное будетъ $= dg = kc$: но какъ треугольника hfg или lek сысканная высота fn или em есть высота пирамиды $ahgfd$ или $lbcek$, то по извѣстнымъ ah и hg основанія ag и высотѣ fn, сыщи толстоту пирамиды $ahgfd$ (453), которая будетъ равна толстотѣ пирамиды $lbcek$; и напослѣдокъ всѣ оныя толстоты сложа вмѣстѣ получишь требуемую толстоту призьматической пирамиды $abcefd$.

473 ЗАДАЧА. *По даннымъ частямъ ab, bc, hf, ef и $fb = ah = gd = ec$ паралелограмнаго пруда $habcefgd$; сыскать число кубическихъ саженъ вынутой земли.*

Рѣшен. Представь себѣ что прудъ разрѣжется плоскостьми по линѣе ef и gh перпендикулярными къ плоскости $abcd$, то оной разсѣчется на три тѣла, изъ коихъ одно будетъ призьма $ikefhmng$ имѣющая основанїе трапецїю $efik$ или $ghmn$ и высоту ge; а другїя два тѣла призьматическїя пирамиды $cbifek$ и $nmahgd$, коихъ основанїи равныя прямоугольники $bcki$ и $mnda$, а высота каждой равна высотѣ fo или lh трапецїи $ikef$ или $mngh$. И такъ для изслѣдованїя желаемаго, будетъ $ab - mi = ab - hf = am + bi$ и $am = ib$. Сыщи въ трапецїи af высоту fi, которая будетъ $= hm = gn = ek$, и по извѣстнымъ бокамъ ki, ef и $if = ke$ сыскавъ площадь ф. 354.

площадь трапеціи *ikef*, умножь высотою *ge*, произведеніе будетъ равно толстотѣ призьмы *ikefhgnm* (446); наконецъ по извѣстнымъ бокамъ *bi*, *bc*, *bf* = *ec*, *if* = *ek* посредствомъ предъидущей задачи сыщи толстоту призьматической пирамиды *cbifek*, умножь оную чрезъ 2, получишь толстоту двухъ равныхъ призьматическихъ пирамидъ *cbifek* + *nmahgd*; наконецъ сложа всѣ оныя толстоты вмѣстѣ, получишь требуемую толстоту параллелограмнаго пруда *habcefgd* въ кубическихъ саженяхъ.

474. ЗАДАЧА. *По даннымъ діаметрамъ kf и le, сыскать толстоту круглаго кольца knfm.*

Рѣшен. Изъ радіуса *gf* вычти радіусъ *ge* получишь діаметръ *ef*. Сыщи площадь круга діаметра
ф. *ef* (256); потомъ сыскавъ окружности круговъ діа-
355. метра *kf* и діаметра *le* умножь полсуммою сихъ окружностей площадь круга діаметра *ef*, получишь требуемую толстоту кольца.

Доказ. Ежели разрѣжешъ кольцо плоскостію перпендикулярною къ его поверьхности, то сѣченіе будетъ кругъ *ef*. И такъ представь себѣ, что ось *gf* съ имѣющимся на концѣ ея кругомъ *ef* сдѣлаетъ цѣлое обращеніе около одного своего конца не подвижно пребывающаго въ точкѣ *g*; въ такомъ случаѣ отъ обращенія круга *ef*, произойдетъ круглое кольцо *fnkm*, и во время сего обращенія каждая линѣя изъ составляющихъ плоскость круга, опишетъ круглую поверьхность или безмѣрно тонкой слой кольца: но какъ радіусы сихъ безмѣрно тонкихъ слоевъ одинъ другаго превосходитъ одинакимъ коли-

количествомъ, слѣдственно составляютъ арифметическую прогресію: но окружности круговъ содержатся какъ радіусы (248), по сей причинѣ и окружности безмѣрно тонкихъ слоевъ составляющихъ толстоту кольца будутъ въ арифметической прогресіи, изъ коихъ первымъ членомъ окружность круга радіуса ge, а послѣднимъ окружность круга радіуса gf, число жъ сихъ членовъ, то есть число слоевъ равно числу линѣй опредѣляющихъ площадь круга ef: но полсуммы наружныхъ членовъ умноженная числомъ членовъ, равна суммѣ прогресіи (ариф. 314); слѣдовательно площадь круга діаметра ef, умноженная полсуммою двухъ окружностей круговъ діаметра kf и діаметра le, равна толстотѣ круглаго кольца op.

Примѣч. Такимъ образомъ сыскивается толстаго всякаго кольца.

475. ТЕОЕМА. *Толстота шара A къ толстотѣ куба діаметра ab, содержится какъ окружность большаго круга къ 6ти діаметрамъ ab; или по содержанію Архимедову какъ 11 : 21, Цейленонову 157 : 300, Меціеву 355 : 678*

Доказ. Положимъ что окружность большаго круга $= x$, діаметръ $ab = y$, будетъ толстота шара равна произведенію изъ поверьхности (которая $= x \times y$ § 427) на одну треть радіуса или одну шестую діаметра ф. 332.
ab (462), то есть $\frac{x \times y \times y}{6} = \frac{x \times y^2}{6}$ Толстота куба діаметра $ab = y^3$ (445); того ради толстота шара A содержится къ толсто-

толстотѣ куба діаметра ab, какъ $\frac{\overline{x}\times\overline{y}^{2}}{6} : \overline{y}^{3}$, а по раздѣленіи послѣднихъ членовъ на $\overline{y}^{2}$ будетъ $A : \overline{ab}^{3} = \frac{x}{6} : y = x : 6y$ (ариф. 232), то есть толстота шара A къ толстотѣ куба діаметра ab, какъ окружность большаго круга x къ 6ти діаметрамъ; а по содержанію Архимедову какъ $22 : 7 \times 6$ или $22 : 42 = 11 : 21$. Цейленонову какъ $314 : 100 \times 6$ или $314 : 600 = 157 : 300$. Мецієву $355 : 113 \times 6$ или $355 : 678$ ч. д. н.

476. ЗАДАЧА. *По данной толстотѣ шара діаметра $ab = 2200'''$, сыскать онаго діаметръ ab,*

ф. 332. *Рѣшен.* Сдѣлай слѣдующую пропорцію; $11 : 21$ такъ толстота шара A къ толстотѣ куба діаметра ab, на конецъ сыскавъ корень сего куба (ариф. 188), получишь діаметръ ab, то есть

$11 : 21 = 2200''' : 4200'''$.

$\sqrt[3]{4200'''} = 16' =$ діаметру ab.

477. ТЕОРЕМА. *Толстоты шаровъ A и B, содержатся между собою какъ кубы радіусовъ или діаметровъ ab и eq.*

Доказ. Положимъ что окружность круга діаметра $ab = x$, а окружность круга діаметра $eq = y$: то будетъ $A : \overline{ab}^{3} = x : 6ab$

$= 11$

$= 11 : 21$ и $B : \overline{eq}^3 = y : beq = 11 : 21$ (475); и для равенства содержаній будетъ $A : B = \overline{ab}^3 : \overline{eq}^3$ или $8\overline{zb}^3 : 8\overline{qz}^3 = \overline{zb}^3 : \overline{qz}^3$, то есть толстоты шаровъ содержатся между собою какъ кубы радїусовъ или дїаметровъ.

478. ТЕОРЕМА. *Толстоты подобныхъ призьмъ aed и fli, содержатся между собою какъ кубы сходственныхъ боковъ.*

Доказ. Положимъ призьмы *aed* пло- No16
щадь основанія $acd = x$, призьмы *fli* ф.
площадь основанія $fhi = y$, для подобія 356
призьмъ будетъ $ag : mf = ac : fh$ (432), 357.
также $x : y = \overline{ac}^2 : \overline{fh}^2$ (265), а умножа члены сей пропорціи чрезъ члены первой пропорціи, будетъ $x \times ag : y \times mf = \overline{ac}^3 : \overline{fh}^3$ или $\overline{ag}^3 : \overline{mf}^3$ (ариф. 245); то есть толстота призьмы *acd* къ толстотѣ призьмы $fli = \overline{ac}^3 : \overline{fh}^3$ или $\overline{ag}^3 : \overline{mf}^3$.

Слѣдст. I. Толстота подобныхъ ци-
линдровъ *ak* и *dm*, содержатся между со- No14
бою какъ кубы сходственныхъ боковъ; ибо ф.
подобные цилиндры ничто иное какъ 328
подобныя призьмы имѣющія безмѣрное чи- 329.
сло сторонъ коихъ основаніи суть круги.

Слѣдст. II. Толстоты подобныхъ
No16 пирамидъ *abcd* и *fkhi* и подобныхъ кону-
ф. совъ *abc* и *def*, содержатся какъ кубы
356 сходственныхъ измѣреній; ибо подобныя
357. пирамиды суть $= \frac{1}{3}$ своихъ призьмъ *aed* и
No14 *fli*; также и подобныя конусы $= \frac{1}{3}$ подо-
228 бныхъ цилиндровъ *ak* и *dm*; но одинакія
329 части своихъ цѣлыхъ содержаться между
собою какъ ихъ цѣлыя: слѣдственно и
толстоты пирамидъ какъ кубы сходствен-
ныхъ измѣреній, то есть $\frac{1}{3}ag \times x : \frac{1}{3}fm \times y$
$= \overline{ac}^3 : \overline{fh}^3$ (ариф. 239). или $\overline{ab}^3 : \overline{fk}^3$. Тожъ
должно разумѣть и о конусахъ *abc* и *def*.

479. ЗАДАЧА. *По извѣстной толсто-
тѣ четвероторонной призьмы bcega =
14000‴ и содержанію высоты ac къ
боку ab основанія ag 7 : 4 сыскать
высоту ac и бокъ основанія ab.*

Рѣшен. Представь себѣ что сдѣлана
No15 призьма *msq* которой бокъ *mo* основанія
ф. имѣетъ 4 а высота *ms* 7 равныхъ час-
345 тей, сыщи оной толстоту (447); но
358. толстоты подобныхъ призьмъ содержатся
какъ кубы сходственныхъ боковъ, того
ради сдѣлай слѣдующую пропорцію: толс-
тота призьмы *msq* къ толстотѣ данной
bcega какъ $\overline{mo}^3$ къ $\overline{ab}^3$; сыщи корень сего
куба получишь бокъ *ab*, наконецъ сдѣлай
посылку $4 : 7 = ab$: къ высотѣ *ac* по
положенію.

Числами

$mo = 4.\ ms = 7.\ 4 \times 4 = 16 = \overline{mo}^2 =$ пл. основ.

$4 \times 4 \times 4 = 64 = \overline{mo}^3.$ $\quad \times 7 = ms$

$112 =$ тол. приз. $osq.$

$112 : 14000''' = 64 : 8000''' = \overline{ab}^3.$

$4 : 7 = 20 : 35 = ac.$ $\quad \sqrt[3]{8000} = 20' = ab.$

480. ЗАДАЧА. *По данной толстотѣ конуса ahb и содержанїю высоты hn къ дїаметру основанїя ab 9 : 5, сыскать высоту hn и дїаметръ ab.*

Рѣшен. Толстоту конуса *ahb* умножъ чрезъ 3 получишь толстоту цилиндра *abdc*, потомъ сдѣлай слѣдующую пропорцїю какъ 11 : 14 такъ толстота цилидра *abdc* къ толстотѣ призьмы *bce* (443): которой содержанїе высоты *ac* = *hn* къ боку *ab* будетъ такое жъ какое и цилиндра или конуса *ahb*; и такъ по извѣстной толстотѣ призьмы и содержанїю высоты къ боку основанїя, по предъидущей задачѣ сыщется дїаметръ *ab* и высота *ac* = *hn*. ф. 345.

Слѣдст. Изъ сего явно, что посредствомъ сихъ двухъ предложенїй, легко можно по данной толстотѣ и содержанїю сходственныхъ измѣренїй, сыскивать прочихъ призьмъ и пирамидъ желаемыя части.

481. ТЕОРЕМА. *толстота шара ahbm дїаметра ab, къ толстотѣ описаннаго около его равнобочнаго конуса sqr какъ 4 : 9.*

ф. 333. *Доказ.* Понеже площадь круга *qr* основанїя конуса втрое больше площади большаго круга дїаметра *ab* (по доказательству §439) и радїусъ $om = \frac{1}{2}oq = \frac{1}{2}os$; посему радїусъ *om* шара *ahbm* есть $\frac{1}{3}$ высоты *ms* конуса *qsr*; и такъ положимъ $om = x$, площадь большаго круга шара дїаметра $ab = y$, тогда будетъ $3y =$ основанїю конуса *qr*, $3x =$ высотѣ *ms*, толстота конуса $= 3y \times x = 3x \times y$ (452), толстота шара $= 4y \times \frac{x}{3} = \frac{4x \times y}{3}$ (462); того ради толстота шара *ahbm* къ толстотѣ конуса *qrs*, то есть $\frac{4x \times y}{3} : 3x \times y = \frac{4}{3} : 3 = 4 : 9$ (ариф. 239. 233)

Слѣдст. Изъ сего и (462) явствуетъ, что толстоты, шара *ahbm*, цилиндра *cdfe* и конуса *qrs* около онаго описанныхъ; содержатся между собою какъ $\div$ 4 : 6 : 9, то есть, содержатся между собою какъ ихъ поверьхности.

482. ЗАДАЧА. *Сыскать дїаметръ шара, равнаго толстотѣ тѣла A окружающагося кривою поверьхностїю.*

No16 *Рѣшен.* Положи данное тѣло *A* въ
ф. 359 параллелопипедической или цилиндрической фигуры

фигуры пустой сосудъ, какъ здѣсь положенъ въ цилиндръ ac; налей въ сосудъ воды или насыпь мелкаго песку, что бы тѣло водою или пескомъ нѣсколько покрылось; ежели песокъ, то сравняй сверьху, что бы его поверьхность ef параллельна была основанїю цилиндра; и смѣряй по геометрическому маасъ-штабу высоту ae до которой насыпано песку или налито воды Потомъ вынь тѣло вонъ и дай песку съ сыпаться или водѣ скапать, и по сравненїи песка, или по стеченїи воды смѣряй высоту ag осевшаго песку или воды, вычти ag изъ ae останется высота eg, цилиндра gf, котораго толстота равна толстотѣ тѣла A. Ибо по вынятїи изъ воды тѣла, столько верьхняя плоскость ef воды или песку въ низъ опустится, сколько мѣста занимаетъ неправильное тѣло A; и такъ по извѣстной высотѣ eg, дїаметру gh основанїя цилиндра gf сыщи толстоту онаго (448); которая будетъ равна толстотѣ неправильнаго тѣла A. Потомъ представь себѣ толстоту цилиндра gf за толстоту точно круглаго шара, по толстотѣ коего сыщется требуемой дїаметръ шара (476);

Примѣч. Ежели потребуется сыскать толстоту такого тѣла, котораго съ мѣста снять не можно, какъ на прим. статуи или прочихъ подобныхъ сему тѣлъ; то сдѣлай около ...чаго ящикъ въ коемъ бы песокъ держатся могъ. Потомъ сдѣлай сосудъ которой бы содержалъ въ себѣ мѣру кубическаго фута; симъ сосудомъ насыпай ящикъ мелкимъ пескомъ а притомъ

считай сколько кубическихъ футовъ песку всыпано будетъ, чтобъ песокъ выше статуи параллельно основанiю находился. Наконецъ сыскавъ толстоту въ кубическихъ футахъ сдѣланнаго около статуи ящика (447); вычти изъ оной число кубическихъ футовъ всыпаннаго песку, останется толстота статуи.

ф. 360 361 362. 483. *Опредѣлен.* Ежели Половина элипсиса *acb* или *cbd* сдѣлаетъ цѣлое обращенiе около своей оси *ab* или *cd*; то произшедшее отъ сего тѣло, называется элипсоидъ или оваль.

484. ЗАДАЧА. *По данной большой оси ab = 180'' и меньшой cd = 140''; сыскать толстоту элипсоида (овала).*

ф. 361. *Рѣшен.* сыщи площадь круга меньшой оси *cd* (256), умножь оную чрезъ $\frac{2}{3}$ оси *ab* получишь толстоту элипсоида *abcd*.

Числами

$$140'' \times 140'' = 19600^{v} = \overline{cd}^{2}$$

$$14 : 11 = 19600^{v} : 15400^{v} = \text{пл. круг. дiа. } cd.$$

$$180'' \times \tfrac{2}{3} = 120' = \tfrac{2}{3}\, ab$$

$$\begin{array}{r} 308000 \\ 15400 \\ \hline 1848000^{v'} \end{array} = \text{толст. элипсоида}$$

Доказ. Понеже полупоперешники *ec*, *fl*, *gm* и проч. составляющiе плоскость полуэлипсиса *acb*, при обращенiи онаго около своей оси *ab* опишутъ круги, коихъ число будетъ равно числу точекъ составляющихъ ось *ab* полуэлипсиса *acb*, слѣдственно несчетное число сихъ круговъ составятъ толстоту элипсоида *acbd*; также и сходственные полупоперешники *eh*, *fi*, *gk* и проч. опредѣляющiе плос-

плоскость полукруга ahb, опишутъ такое жъ количество круговъ составляющихъ толстоту шара $ahbn$, полупоперешники жъ ce, fl, gm и проч. элипсиса $acbd$ содержатся какъ полупоперешники eh, fi, gk, и проч. круга $ahbn$, то есть $ec : eh = fl : fi = gm : gk$ и проч. (277), по сему $\overline{ec}^2 : \overline{eh}^2 = \overline{fl}^2 : \overline{fi}^2 = \overline{gm}^2 : \overline{gk}^2$ и проч. (ариф. 245); но площади круговъ содержатся между собою какъ квадраты радїусовъ, по сей причинѣ (положимъ площадь круга радїуса $ec = x$, $fl = y$, $gm = z$, и проч. площадь круга радїуса $eh = v$, $if = q$, $gk = r$ и проч.) будетъ $x : v = \overline{ec}^2 : \overline{eh}^2$, $y : q = \overline{fl}^2 : \overline{fi}^2$, $z : r = \overline{gm}^2 : \overline{gk}^2$ и проч. и для равенства содержанїй $x : v = y : q = z : r$ и проч. посему $x + y + z$ и проч: $v + q + r$ и проч. $= x : v$ (ариф. 241); а умножа члены перваго содержанїя чрезъ 2, члены втораго содержанїя чрезъ $\frac{2}{3}ab$, будетъ $(x + y + z$ и проч.$) \times 2 : (v + q + r$ и проч.$) \times 2 = \frac{2}{3}ab \times x : \frac{2}{3}ab \times v$ (ариф. 235); но $(v + q + r$ и проч.$) \times 2 =$ суммѣ круговъ составляющихъ толстоту шара $ahbn = \frac{2}{3}ab \times v$ (462), посему и сумма круговъ $(x + y + z +$ и проч.$) \times 2$ составляющихъ толстоту элипсоида $abd = \frac{2}{3}ab \times x$ (ариф. 248), то есть толстота элипсоида равна произведенїю изъ площади круга x меньшой оси cd и двухъ третей большой оси ab.

Примѣч. Для сысканїя толстоты Элипсоида $acbd$ происходящаго отъ обращенїя около меньшой оси cd, должно множить площадь круга большой оси ab чрезъ двѣ трети меньшой оси cd. ф. 362.

485. ЗАДАЧА. *сдѣлать Пифометрическую трость, посредствомъ которой*

сыскивается число ведръ или кружекъ въ какомъ нибудь цилиндрическомъ сосудѣ жидкаго тѣла; на прим. пива, вина и проч.

ф. 363. *Рѣшен.* Прежде всего надлежитъ сыскать по приложенной при семъ таблицѣ * дїаметръ *ab* основанїя, и высоту *ac* цилиндра *cb*, въ которой бы входило жидкой матерїи на прим. ведро или кружка слѣдующимъ образомъ: возьми изъ таблицы число кубическихъ дюймовъ ведра или кружки, составляющихъ толстоту цилиндра *abdc*, коего дїаметръ *ab* къ высотѣ *ac* долженъ содержатся на прим. какъ 3 : 2, сыщи онаго по § 480 дїаметръ *ab* и высоту *ac*; потомъ на концѣ произвольно проведенной линѣи *ac* поставь перпендикуляръ *ab* = дїаметру *cd*, опредѣли *a*1 = *ab*, проведи *b*1, которая будетъ = дїаметру

ф. 364. двойной мѣры одинакой высоты съ первою; перенеси *b*1, на *a*2, будетъ *b*2 = *a*3 дїаметръ тройной мѣры тойже высоты. Подобнымъ образомъ найдутся дїа-

* Мѣра употребляемая при измѣренїи жидкихъ тѣлъ.	Россїйск. кубическ. дюймовъ.
кружка или осмуха содержитъ въ себѣ	94. 319‴
четверть - - - - - - -	188. 638‴
полведра - - - - -	377. 276‴
ведро - - - - - -	754.552‴

дїаметры $a4$, $a5$, $a6$, $a7$ и проч. наконецъ взявъ сдѣланной изъ крѣпкаго дерева брусокъ ac, на одну его сторону перенеси всѣ тѣ раздѣленїя $a1$, $a2$, $a3$, $a4$, и проч. означь оныя числами 1. 2, 3, 4, и проч. а на другой его бокъ перенеси высоту db цилиндра $abdc$ столько разъ, сколько оныхъ на брускѣ помѣститься можетъ, и оныя также означь числами, получишь желаемую пифометрическую трость.

Доказ. Извѣстно (144) что $\overline{ab}^2 + \overline{a1}^2 = \overline{b1}^2$, линѣя жъ $ab = a1$, то будетъ $\overline{b1}^2 = \overline{a2}^2$ вдвое больше $\overline{ab}^2$; равнымъ образомъ $\overline{b2}^2 = \overline{a3}^2$ втрое больше $\overline{ab}^2$, и квадратъ линѣи $b3 = a4$ вчетверо больше $\overline{ab}^2$, и такъ далѣе: но круги содержатся между собою какъ квадраты дїаметровъ (266); того ради $a2$ есть дїаметръ двойнаго круга, $a3$ дїаметръ тройнаго, $a4$ дїаметръ четвернаго и проч. толстота жъ цилиндровъ одной высоты и такой какъ мѣра $abdc$, содержатся какъ круги ихъ основанїй (443); и такъ когда линѣя $ab = a1$ есть дїаметръ круга одномѣрнаго сосуда, то будетъ $a2$ дїаметръ круга двумѣрнаго сосуда, $a3$ дїаметръ основанїя сосуда въ три мѣры и такъ далѣе, слѣдовательно ежели трость тою стороною на которой назначены дїаметры, приложишь къ дїаметру даннаго цилиндрическаго сосуда, то будетъ

извѣстно сколько надобно мѣръ *abdc* чтобъ налить его до тѣхъ мѣстъ какъ высока мѣра *abdc*; потомъ приложа тростъ къ длинѣ даннаго сосуда другою его стороною на которой высота *db* мѣры назначена, найденное на оной число умножь діаметромъ вымѣреннаго основанія, получишь число мѣръ въ данной сосудъ входящее.

486. ЗАДАЧА. *Сыскать толстоту бочки abhg и узнать сколько въ оную входитъ данной величины мѣръ.*

ф. 365. *Рѣшен.* Вымѣряй посредствомъ дюймовъ длину бочки *ef*, и діаметръ дна *ab*, такожде и діаметъ *cd* у втулки гдѣ обыкновенно ширѣ бываетъ: но какъ бочка отъ жерла на обѣ стороны дѣлается уже, то можно ея почесть (какъ опыты уверяютъ, хотя геометрически доказать и не можно) за цилиндръ котораго основаніе есть кругъ равной полсуммѣ круговъ *ab* и *cd*. И такъ по извѣстнымъ діаметрамъ *ab* и *cd* сыщи площади круговъ (256); полсуммы сихъ площадей умножь длиною бочки *ef*, получишь толстоту оной въ кубическихъ дюймахъ; число сихъ дюймовъ раздѣли на число кубическихъ дюймовъ составляющихъ толстоту ведра или кружки, получишь число ведръ или кружекъ въ бочку входящее.

Числами

Числами.

положимъ на при. $ab = 36''$. $cd = 44''$. $ef = 90''$

будетъ площадь круга $ab = 1018'^{v}. 28$.

площадь круга $cd = 1521'^{v}. 14$. (§256)

сумма ихъ $= 2539'^{v}. 42$.

$\frac{2539'^{v}. 42}{2} = 1269'^{v}. 71$ = полсуммѣ круговъ основанія цилиндра толстотою равнаго бочкѣ.

$1269'^{v}. 71 \times 90'' = 11427'^{v}. 390$ = толстотѣ бочки.

$754''. 552$ = толстотѣ вѣдра (485).

$754'^{v}. 552)\ 11427'^{v}. 390$ (15. вѣдр. 1 круж. = числу вѣдръ. и проч. содержащихся въ бочкѣ.

Рѣшен. Второе, посредствомъ пифометрической трости.

Возьми пифометрическую трость и тою ея стороною на которой назначены по перешники ведра или кружки, вымѣряй діаметръ дна ab и средней діаметръ cd у втулки, потомъ оные діаметры ab и cd сложа въ одну сумму раздѣли по поламъ, получишь основаніе цилиндра толстотою равнаго бочкѣ; на послѣдокъ другою стороною пифометрической трости, накоторой назначены высоты ведра или кружки, вымѣряй длину бочки ef, умножь оную полсуммою круговъ ab и cd произведеніе покажетъ число ведръ или кружекъ, которыя содержатся въ цѣлой бочкѣ.

Поло-

Положимъ на при. $ab = 9$. $cd = 13$, будетъ сумма ихъ $= 9 + 13 = 22$. $\frac{22}{2} = 11 =$ полсуммѣ круговъ ab и cd. $ef = 16$. $11 \times 16 = 176 =$ числу мѣръ.

Примѣч. Ежели должно будетъ сыскать число мѣръ не полной бочки, то надлежитъ оную поставить дномъ къ верьху и смѣрять діаметръ круга у поверьхности жидкаго тѣла и діаметръ дна бочки, также и высоту; потомъ сыскать число мѣръ вышепредложеннымъ образомъ

О ИЗМѢРЕНІИ ТОЛСТОТЫ ПЯТИ ПРАВИЛЬНЫХЪ ТѢЛЪ.

487. ТЕОРЕМА. *Толстота всякого правильнаго тѣла, равна произведенїю изъ его поверьхности чрезъ $\frac{1}{3}$ перпендикуляра изъ центра тѣла на одну его сторону или грань опущеннаго.*

ф. *Доказ.* Понеже около всякаго правильнаго тѣла
303 опишется шаръ, и когда изъ центра онаго ко всѣмъ
304 угламъ проведутся линѣи, то есть радїусы шара,
305 то оное тѣло раздѣлится на столько равныхъ пира-
307. мидъ сколько оно сторонъ имѣетъ (396); поелику основанїи ихъ суть равныя стороны ограничивающїя тѣло, а высоты суть равные перпендикуляры изъ центра на каждую сторону или основанїе пирамиды опущенные, по сему оныя пирамиды равны между собою (450); но толстота каждой пирамиды равна произведенїю изъ основанїя и одной трети высоты, слѣдовательно толстота всѣхъ пирамидъ составляющихъ толстоту тѣла равна произведенїю

суммы

суммы основанїй или поверьхности тѣла умноженной одною третью общей ихъ высоты.

Для опредѣленїя по даннымъ бокамъ въ правильныхъ тѣлахъ высоты каждой пирамиды, слѣдующїя предложенїя знать надлежитъ.

488. ТЕОРЕМА. *Квадратъ бока ae тетраедра abde, содержится къ квадрату дїаметра шара eg около онаго описаннаго какъ 2 : 3.*

Доказ. Отъ верьха e къ центру основанїя abd тетраедра, проведи линѣю ce, которая будетъ высота тетраедра. И такъ по свойству равностораннаго треугольника abd, будетъ $\overline{ad}^2$ или $\overline{ae}^2 = 3\overline{ac}^2$ (205); а въ прямоугольномъ треугольникѣ aec, $\overline{ae}^2 = \overline{ec}^2 + \overline{ac}^2$, поставь $3\overline{ac}^2$ вмѣсто $\overline{ae}^2$, будетъ $3\overline{ac}^2 = \overline{ec}^2 + \overline{ac}^2$, отъ коихъ отнявъ $\overline{ac}^2$, останется $2\overline{ac}^2 = \overline{ce}^2$; по свойству жъ круга $eagf$ будетъ $\div ce : ac : cg$, и $\overline{ce}^2 : \overline{ac}^2 = ce : cg$ (181); или $2\overline{ac}^2 : \overline{ac}^2 = ce : cg$, но $2\overline{ac}^2$ вдвое больше $\overline{ac}^2$, посему $ce = 2cg$ и $eg = 3cg$; также $\div eg : ae : ce$, при чѣмъ и $\overline{eg}^2 : \overline{ae}^2 = eg : ce = 3cg : 2cg$ или (по раздѣленїи на cg) $3 : 2$ (ариф. 240), слѣдовательно $\overline{ae}^2 : \overline{eg}^2 = 2 : 3$ (ариф. 218). Ф. 366.

489. ТЕОРЕМА. *Квадратъ бока ab октаедра abcd, къ квадрату дїаметра шара ac, какъ 1 : 2.*

Доказ. Понеже какъ видно октаедръ раздѣляется на двѣ равныя четвероугольныя пирамиды Ф. 367.

afbce

afcbe и *ceadf*, которыхъ общее основаніе есть квадратъ *aecf*, коего діогональ *ac* равна діаметру шара, и $bd =$ суммѣ высотъ *bg* и *dg* оныхъ пирамидъ; но въ прямоугольномъ треугольникѣ *acf*, $\overline{ac}^2 = \overline{af}^2 + \overline{cf}^2$ или для равенства *af* и *cf*, $\overline{ac}^2 = 2\overline{af}^2$ того ради $\overline{af}^2 : \overline{ac}^2$ или $2\overline{af}^2 = 1 : 2$.

490. ТЕОРЕМА. *Квадратъ бока ab куба abdef, къ квадрату діаметра шара ad какъ 1 : 3.*

ф. 368. *Доказ.* Проведи въ квадратѣ *bgdc* діагональ *bd* и въ кубѣ діаметръ *ad*, будетъ $\overline{bd}^2 = \overline{bg}^2 + \overline{gd}^2$; но $bg = gd$, по сему $\overline{bd}^2 = 2\overline{bg}^2 = 2\overline{ab}^2$, а для прямоугольнаго треугольника *abd*, $\overline{ad}^2 = \overline{bd}^2 + \overline{ab}^2 = 2\overline{ab}^2 + \overline{ab}^2 = 3\overline{ab}^2$, слѣдовательно $\overline{ab}^2 : \overline{ad}^2$ или $3\overline{ab}^2 = 1 : 3$.

491. ТЕОРЕМА. *Квадратъ діаметра шара, втрое больше квадрата діогонали ab пятіугольника составляющаго сторону додекаедра, въ ономъ шарѣ вписаннаго.*

ф. 369. *Доказ.* Понеже додекаедръ составляется изъ 12 ти правильныхъ пятіугольниковъ, слѣдственно оной состоитъ изъ 12 равныхъ пирамидъ имѣющихъ верьхи въ центрѣ шара около додекаедра описаннаго, коихъ наклоненные бока равны радіусамъ онаго; и такъ смотря на склѣенной изъ бумаги додекаедръ, окажется въ немъ и въ томъ же шарѣ вмѣщенной кубъ *dabc*, котораго каждая сторона есть квадратъ изъ четырехъ діогоналей вмѣстѣ составленныхъ сторонъ додекаедра, какъ *abcd*; но квадратъ бока *ab* куба, *abcd*, то есть квадратъ діагонали *ab* каждой стороны додекаедра, къ квадрату діаметра *db* шара какъ 1 : 3 (490), слѣдовательно втрое больше квадрата діогонали *ab*.

492. ТЕОРЕМА *Квадратъ радїуса* gb, *пятїугольника* $cdebf$ *сдѣланнаго изъ бока* de, *икосаедра* $ckbphl$ *содержится къ квадрату дїаметра шара* bl *описаннаго около икасаедра какъ* 1 : 5.

Доказ. Представь себѣ что около основанїй двухъ противуположенныхъ пятїугольныхъ равныхъ пирамидъ $cdebkf$, и $lsrpho$, описаны круги $anbf$ и $loqs$, коихъ дїаметры ab и lq для равенства основанїй пирамидъ, равны между собою. Изъ средины n дуги de проведи хорду dn и no, будетъ $dn =$ боку десятїугольника и $no = al$ есть разстоянїе двухъ параллельныхъ круговъ $anbf$ и $olqs$; но въ прямоугольномъ треугольникѣ dno или one, $\overline{od}^2 = \overline{on}^2 + \overline{nd}^2$, а понеже $od = de$ есть бокъ пятїугольника, а dn бокъ десятїугольника одного круга, посему $no = al =$ боку шестїугольника (215) $=$ радїусу bg того же круга $anbf$, наконецъ въ прямоугольномъ треугольникѣ abl, $\overline{bl}^2 = \overline{ab}^2 + \overline{al}^2$; но $ab = 2bg = 2al$, того ради $\overline{bl}^2 = 4\overline{bg}^2 + \overline{bg}^2 = 5\overline{bg}^2$; слѣдовательно $\overline{bg}^2 : \overline{bl}^2$ или $5\overline{bg}^2 = 1 : 5$. ф. 370.

Слѣдст. I. Изъ сего видно, что квадратъ, дїаметра bl шара описаннаго около икосаедра, равенъ суммѣ квадратовъ дїогонали df съ квадратомъ бока de пятїугольника $cdebf$; ибо по (217) $\overline{df}^2 + \overline{de}^2 = 5\overline{bg}^2$; но $5\overline{bg}^2 = \overline{bl}^2$ слѣдственно $\overline{bl}^2 = \overline{df}^2 + \overline{de}^2$.

Слѣдст. II. Дїаметръ bl шара, описаннаго около икосаедра, состоитъ изъ двухъ боковъ десятїугольника, и радїуса bg круга $anbf$ описаннаго около пятїугольника сдѣланнаго изъ бока de икосаедра : ибо противоположенныя пирамиды $cdbk$ и $lrph$ во всѣхъ частяхъ равны между собою, посему вы-

высота kg = высотѣ hn; въ прямоугольномъ же треугольникѣ bgk $\overline{bk}^2 = \overline{bg}^2 + \overline{kg}^2$; но $bk = de$ есть бокъ пятїугольника, а bg радїусъ круга $cnbf$ есть бокъ шестїугольника, посему $kg = hm$ = боку десятїугольника тогожъ круга, также въ разсужденїи параллельныхъ круговъ $cnbf$ и $loqs$, по $= mg$ = радїусу bg или ag.

493. ЗАДАЧА. *По дїаметру шара ab, начертить бока, каждаго изъ пяти правильныхъ тѣлъ, въ оному шарѣ налисанныхъ.*

ф. 371. *Рѣшен.* Раздѣли дїаметръ шара ab на три равныя части въ g и o, поставь изъ g и центра f перпендикуляры gk и fh, протяни линѣи ak, ah, и kb; раздѣли ak по наружной посредственной пропорцїи въ n. на дїаметрѣ ab изъ b поставь перпендикуляръ $bc = ab$, протяни cf и bd. Будетъ bk бокъ тетраедра. ah бокъ октаедра. ak бокъ куба. bd бокъ икосаедра. an бокъ додекаедра.

Доказ. 1е. Ибо по §172 будетъ $\div ab : bk : bg$, притомъ же $\overline{ab}^2 : \overline{bk}^2 = ab : bg$ (181); но $ab : bg = 3 : 2$, посему $\overline{bk}^2 : \overline{ab}^2 = 2 : 3$; слѣдственно bk есть бокъ тетраедра (488).

2е. $\div ab : ah : af$ (172): притомъ же $\overline{ab}^2 : \overline{ah}^2 = ab : af$ или $2 : 1$ (181), посему $\overline{ah}^2 : \overline{ab}^2 = 1 : 2$, (ариф. 218) слѣдственно ah бокъ октаедра (489).

3е. $\div ab : ak : ag$ (172) и $\overline{ab}^2 : \overline{ak}^2 = ab : ag$ или $3 : 1$ (181), посему $\overline{ak}^2 : \overline{ab}^2 = 1 : 3$ (ариф. 229), слѣдственно ak = боку куба (490).

4е. Понеже бокъ куба ak = дїогонали пятїугольника составляющаго сторону додекадра въ одномъ шарѣ вписаннаго (491); а когда дїогональ пятїугольника

ника

ника раздѣлится по наружной посредственной пропорціи, тогда средняя an будетъ = боку того пятіугольника (214); слѣдовательно an есть бокъ додекаедра.

5 е. Изъ точки d опусти перпендикуляръ de, для подобныхъ треугольниковъ fcb и fde и что $bc = 2bf$ будетъ $ed = 2ef$; посему $\overline{fd}^2 = \overline{bf}^2 = \overline{ed}^2 + \overline{ef}^2 = 4\overline{ef}^2 + \overline{ef}^2 = 5\overline{ef}^2$; но $bc = ab = 2bf$, посему $\overline{ab}^2 = 4\overline{bf}^2 = 20\overline{ef}^2$; того ради $\overline{ed}^2$ или $4\overline{ef}^2 : \overline{ab}^2$ или $20\overline{ef}^2 = 1 : 5$, слѣдовательно ed есть радіусъ пятіугольника сдѣланнаго изъ бока икосаедра (492); а понеже діаметръ шара ab состоитъ изъ двухъ боковъ десятіугольника и радіуса круга de описаннаго около пятіугольника сдѣланнаго на бокѣ икосаедра; по сей причинѣ радіусъ bf онаго шара $= \frac{1}{2}$ радіуса de съ бокомъ десятіугольника: но $ef = \frac{1}{2}$ радіуса de или pe, посему be есть бокъ десятіугольника круга радіуса de (213); но $\overline{ed}^2 + \overline{be}^2 = \overline{bd}^2$, слѣдовательно bd есть бокъ пятіугольника въ томъ же кругѣ вписаннаго (215), то есть = боку икосаедра.

Напослѣдокъ положа діаметръ ab шара $= 1000'$; бока правильныхъ тѣлъ сыщутся слѣдующимъ образомъ:

1е. Сдѣлай слѣдующую пропорцію, какъ 3 : 2 такъ квадратъ діаметра ab, будетъ содержаться къ квадрату бока bk тетраедра, изъ площади сего квадрата извлеки корень, получишь бокъ bk тетраедра.

то есть

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = \overline{ab}^2$$

$$3 : 2 = 1000000'' : 666666 = \overline{bk}^2.$$

$$\sqrt[2]{666666''} = 816' = bk = \text{боку тетраедра.}$$

2е. Сдѣлай посылку какъ 2 : 1 такъ квадратъ дїаметра ab, будетъ содерьжаться къ квадрату бока ah октаедра, квадратной корень сего числа, будетъ = боку ah октаедра.

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = \overline{ab}^2$$

$$2 : 1 = 1000000'' : 500000'' = \overline{ah}^2$$

$$\sqrt[2]{500000''} = 707' = \text{боку октаедра } ah.$$

3 е. Площадь квадрата дїаметра шара ab раздѣли на три равныя части, изъ третїй части сыщи квадратной корень, получишь бокъ куба ak.

то есть

$$1000' \times 1000' = 1000000'' = \overline{ab}^2$$

$$\frac{1000000}{3} = 333333'' = \overline{ak}^2,$$

$$\sqrt[2]{333333''} = 577' = \text{боку куба } ak.$$

4 е. Поелику бокъ куба ak = дїогонали пятїугольника опредѣляющаго сторону додекаедра; того ради по извѣстной дїогонали ak, сыщи бокъ пятїугольника (218), то есть бокъ an додекаедра; которой будетъ = 357 = an.

5 е. Умножь ab квадратно изъ пятой части сего квадрата сыщи корень, которой будетъ = радїусу ed круга описаннаго около пятїугольника, сдѣланнаго на бокѣ икосаедра.

то есть

$$1000 \times 1000 = 1000000'' = \overline{ab}^2.$$

$$\frac{\overline{ab}^2}{5} = \overline{ed}^2 = \frac{1000000''}{5} = 200000''$$

$\sqrt{200000} = 447' = de$, потомъ сыщется бокъ пятїугольника радїуса de (219), то есть бокъ bd икосаедра, которой будетъ = 525′.

494.

494. ЗАДАЧА. *По данному боку додекаедра $am = 3568''$ сыскать дїаметръ шара, ab въ которомъ помянутое тѣло впишется*

Рѣшен. По извѣстному боку am, сыщи дїогональ пятїугольника составляющаго сторону додекаедра (218); которая будетъ = боку ak куба вписаннаго въ томъ же шарѣ; наконецъ по извѣстному боку ak куба сыщи дїаметръ шара ab (493); Ф. 371.

Числами.

$3568'' = am$,

сысканная дїогональ пятїугол. $ak = 5774''$ = боку куба.

$$5774'' \times 5774'' = 33339076^{v} = \overline{ak}^{2}.$$

$$\times 3$$

$$100017228^{v} = \overline{ab}^{2}.$$

$$\sqrt[2]{100017228^{v}} = 1000'' = \text{дїаметру } ab.$$

495. ЗАДАЧА. *По извѣстному боку bd икосаедра $5257''$; сыскать дїаметръ шара ab, въ которомъ оное тѣло впишется.* Ф. 371.

Рѣшен. По данному боку db, сыщи дїогональ пятїугольника сдѣланнаго на бокѣ икосаедра (218), потомъ изъ суммы квадратовъ бока bd, и дїогонали пятїугольника, сыщи корень квадрата, получишь желаемое.

то есть

$$5257'' \times 5257'' = 27636049^{v} = \overline{db}^{2}$$

сысканная дїогональ пятїугольника $= 8506''$.

$$8506'' \times 8506'' = 72352036^{v} = \text{квадр. дїогонали}$$

$$27636049^{v} = \overline{db}^{2}$$

$$99988085^{v} = \text{квадр. дїам. } ab.$$

$\sqrt[2]{99988085} = 9999''$, а придавъ къ сему числу вмѣсто оставшейся дроби 1'' будетъ $= 1000' =$ дiаметру *ab*.

496. ЗАДАЧА. *По данному боку ad тетраедра adbe, сыскать онаго толстоту.*

ф. 366. *Рѣшен.* Понеже тетраедръ ничто иное какъ правильная трехсторонная пирамида. того ради по извѣстнымъ бокамъ сыщется толстота оной (453).

497. ЗАДАЧА: *По данному боку ad = af октаедра afdcb, сыскать онаго толстоту.*

ф. 367. *Рѣшен.* Понеже октаедръ состоитъ изъ двухъ четверосторонныхъ пирамидъ *aecdf* и *aecbf*, коихъ общее основанiе есть квадратъ *aecf*, и сумма ихъ высотъ $bg + dg = bd =$ дiогонали *ac* квадрата *aecf*, того ради сыскавъ площадь квадрата *aecf* умножь оную чрезъ $\frac{2}{3}$ *bd*, получишь желаемую толстоту.

498. ЗАДАЧА. *По данному боку af, сыскать толстоту куба abdef.*

ф. 368. *Рѣшен.* Бокъ *af* умножь кубично, получишь требуемую толстоту куба (445).

499. ЗАДАЧА. *По данному боку gf, додекаедра ahg, сыскать онаго толстоту.*

No13 ф. 306. *Рѣшен.* Сыщи дiаметръ шара описаннаго около додекаедра (494), и радiусъ онаго, которой будетъ = наклоненному боку *bg* пятiугольной пирамиды *fgrb*; потомъ по извѣстному боку *fg*, сыщи радiусъ *fq*, правильнаго пятiугольника *rfg*. По извѣс-

тному

тному радïусу fq и наклоненному боку bf, сыщи высоту bq пирамиды (453); наконецъ сыскавъ поверьхность додекаедра умножь оную чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты bq, получишь желаемую толстоту додекаедра (487).

500. ЗАДАЧА. *По данному боку bc икосаедра $abcek$; сыскать онаго толстоту.*

Рѣшен. По данному боку bc, сыщи дïаметръ шара и радïусъ $kb = kc$ описаннаго около сего тѣла (495); потомъ по извѣстнымъ бокамъ bk, kc, kh и bc сыщи высоту km трехъ сторонной пирамиды $bckh$ (453); наконецъ сыскавъ поверьхность икосаедра умножь оную чрезъ $\frac{1}{3}$ высоты km, получишь желаемую толстоту икосаедра. ф. 307.

Прибавл. Ежели дано будетъ по извѣстному дïаметру шара сыскать толстоту какого нибудь правильнаго тѣла, то оное легко опредѣлиться по средствомъ предъидущихъ правилъ; ибо по дïаметру шара сыскавъ бокъ правильнаго тѣла сыщется и толстота онаго.

О ПРЕВРАЩЕНIИ ТѢЛЪ.

501. ЗАДАЧА. *Между двухъ данныхъ линѣй a и b сыскать двѣ среднiя пропорцïональныя линѣи, непрерывной геометрической пропорцïи.*

Рѣшен. Изъ данныхъ линѣй a и b, сдѣлай прямоугольникъ he (70), продолжи ed и eg не опредѣленно, проведи дïогонали dg и he, изъ точки i взаимнаго ихъ пресѣченïя описывай круги до тѣхъ поръ, пока три точки c, h и k будутъ въ прямой линѣе; при чемъ опредѣлятся требуемыя No. 17 ф. 372.

двѣ среднiя пропорцiональныя линѣи cd и gk между dh и hz или между a и b.

Доказ. Продолжи ce и ek до f и n. проведи nf: опусти перпендикуляры il и im, коими хорды cf и kn также линѣи de и eg раздѣлятся на двѣ равныя части въ точкахъ l и m, по сему $dc = ef$ и $en = gk$. Для подобныхъ треугольниковъ cdh и efn будетъ $dh : (ef)cd = cd : (en)gk$, также изъ подобныхъ треугольниковъ efn и gkh, $(ef)cd : gk = (en)gk : gh$; по сей причинѣ $dh : cd = cd : kg = kg : gh$, то есть $\div\!\div\, dh : cd : kg : gh$; но $dh = a, gh = b$ слѣдовательно cd и gk суть среднiя пропорцiональныя между a и b.

Другое Рѣшен. По средствомъ мѣдныхъ прямоугольниковъ. На концѣ про-
ф. 373. веденной линѣи $de = b$, поставъ перпендикуляръ $dh = a$, продолжи ed и hd не опредѣленно; потомъ взявъ два мѣдные прямоугольника hcr и pfe соедини оные вмѣстѣ какъ изъ фигуры видно, потомъ положа ихъ на бумагу такъ чтобъ внутренней бокъ ch одного находился у точки h, а другаго наружной бокъ ef у точки e подвигай оные туды и сюды до тѣхъ поръ, пока верьхи прямыхъ угловъ прямоугольниковъ, будутъ находиться на продолженныхъ линѣяхъ hf и ec въ точкахъ c и f; что учиня, опредѣлятся желаемыя среднiя пропорцiональныя

ныя линѣи, первая dc и вторая df между dh и de или a и b.

Доказ. Ибо треугольники hcf и cfe по рѣшенїю прямоугольные; того ради $hd : cd = cd : df$, также $cd : df = df : de$ (122), слѣдовательно $hd : cd = df : de$, то есть $\div hd : cd : df : de$.

502. ТЕОРЕМА. *Ежели четырѣ линѣи a, b, c и d въ непрерывной геометрической пропорцїи; то квадратъ первой линѣи a, умноженной на послѣднюю d равенъ кубу изъ первой средней b то есть $\overline{a}^2 \times d = \overline{b}^3$.*

Доказ. Понеже $a : b = c : d$, также и $a : b = b : c$ по положенїю; причемъ въ первой пропорцїи $a \times d = b \times c$, а во второй $a \times c = \overline{b}^2$ (ариф. 222), изъ коихъ первыя и вторыя части умножа между собою будетъ $\overline{a}^2 \times d \times c = \overline{b}^3 \times c$ (ариф. 35), а раздѣля оба количества чрезъ c, частное $\overline{a}^2 \times d = \overline{b}^3$, то есть квадратъ первой линѣи a умноженной чрезъ послѣднюю d, равенъ кубу изъ первой средней b. ф. 374.

503. ТЕОРЕМА. *Изъ четырехъ линѣй a, b, c и d непрерывной геометрической пропорцїи, кубъ первой линѣи a*

содержится къ кубу второй b, какЪ первая линѣя a къ послѣдней d.

Доказ. Ибо для доказательства что $a^3 : b^3 = a : d$ должно быть произведенiю крайнихЪ членовЪ равно произведенiю среднихЪ; но по предЪидущей теоремѣ доказано что $a^2 \times d = b^3$; того ради умножа сiи равныя количества чрезЪ a, будетЪ $a^3 \times d = b^3 \times a$, то есть произведенiе крайнихЪ членовЪ равно произведенiю среднихЪ; слѣдовательно показанная пропорцiя справедлива.

504. ЗАДАЧА. *Между двухЪ данныхЪ чиселЪ 4 и $13\frac{1}{2}$, сыскать два среднiя пропорцiональныя числа непрерывной геометрической пропорцiи.*

Рѣшен. Умножа первое число 4 кубично, сдѣлай слѣдующую пропорцiю: какЪ содержится $4 : 13\frac{1}{2}$ такЪ кубЪ перваго числа 64 къ кубу втораго средняго, то есть $4 : 13\frac{1}{2} = 64 : \frac{64 \times 13\frac{1}{2}}{4} = 216$, корень сего куба $= 6$ есть первое среднее; потомЪ умножь первое среднее 6 чрезЪ послѣднее $13\frac{1}{2}$, произведенiе $6 \times 13\frac{1}{2} = 81$ будетЪ равно квадрату втораго средняго, наконецЪ сыщи корень сего квадрата получишь второе среднее число $= 9$; и такЪ будетЪ ∺ $4 : 6 : 9 : 13\frac{1}{2}$.

505. ЗАДАЧА. *Трехсторонную пирамиду abcd превратить въ призьму fghk по основанїю abc.*

Рѣшен. Сдѣлай основанїе *fgh* = основанїю *abc* пирамиды, раздѣли высоту *ed* на три равныя части, сдѣлай высоту *mn* равну третїй части высоты *eb* пирамиды *abcd*, будетъ призьма *fghk* желаемая. ф. 375.

Доказ. Понеже толстота пирамиды равна произведенїю изъ основанїя *acb* и одной трети высоты *ed*; но основанїе призьмы равно основанїю пирамиды, и высота *mn* равна $\frac{1}{3}$ высоты *ed* пирамиды, того ради и толстота призьмы *fghk* = толстотѣ пирамиды *abcd*.

506. ЗАДАЧА. *Сдѣлать пятисторонную призьму fklm, равну данной четверосторонной пирамидѣ acbd, которой бы высота была равна высотѣ данной пирамиды.*

Рѣшен. Основанїе *ab* пирамиды *acbd* раздѣли на три равныя части (335); третью часть преврати въ правильной пятїугольникъ *fk* (315), сдѣлай высоту *on* = высотѣ *de*, будетъ призьма *fklm* желаемая. ф. 376.

Доказ. Чтобъ доказать сего справедливость: то положимъ основанїе *ab* пирамиды

миды $= x$, высота $de = y = on$, основанїе fk призьмы будетъ $= \frac{1}{3} x$, по сему толстота пирамиды $acbd$ будетъ $= \frac{1}{3} x \times y$ (452), а толстота призьмы $= \frac{1}{3} x \times y$ (446); но $\frac{1}{3} x \times y = \frac{1}{3} x \times y$, слѣдовательно оные тѣла толстотою равны.

507. ЗАДАЧА. *Превратить цилиндръ ab, въ конусъ по одной высотѣ.*

Ф. 377. *Рѣшен.* Сдѣлай кругъ cd втрое больше круга ag (330), изъ центра f поставь перпендикуляръ $ef = bg$, будетъ конусъ $ced =$ цилиндру ab.

Доказ. Положимъ площадь круга $ag = x$, высота $bg = ef = y$, будетъ основанїе $cd = 3x$. Толстота цилиндра $ab = x \times y$ (446), толстота конуса $= 3x \times \frac{1}{3}y = x \times y$, слѣдовательно оные тѣла толстотою равны.

508. ЗАДАЧА. *Сдѣлать трехсторонную пирамиду fgk, равну четверосторонной призьмѣ acde, которой бы основанїе равно было основанїю призьмы.*

Ф. 378. *Рѣшен.* Основанїе призьмы ac преврати въ равносторонной треугольникъ fgl, сдѣлай высоту kh втрое больше высоты bd, будетъ пирамида $fgk =$ призьмѣ $acde$.

Доказ.

Доказ. Ежели положимъ основанїе призьмы $ac = x$, высота $bd = y$, то будетъ основанїе fgl пирамиды $= x$, а высота $kh = 3y$; толстота жъ призьмы $= x \times y$, а толстота пирамиды $= x \times \frac{3y}{3} = x \times y$, слѣдовательно оные тѣла толстотою равны.

509. ЗАДАЧА. *Сдѣлать четверосторонную призьму bg равну данному цилиндру ac.*

Рѣшен. Основанїе цилиндра ab преврати въ квадратъ ef (318), сдѣлай высоту $fg =$ высотѣ bc цилиндра ac, будетъ призьма eg желаемая. ф. 379.

Доказ. Понеже основанїе ab цилиндра ac, равно основанїю ef призьмы eg, а высота $bc =$ высотѣ fg по рѣшенїю; того ради оныя тѣла равны между собою (442).

Примѣч. Такимъ же образомъ превращается цилиндръ въ призьму трехсторонную, пятисторонную и проч.

510. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ hkm равенъ четверосторонной призьмѣ efg.*

Рѣшен. Между бокомъ of основанїя ef, и высотою fg призьмы efg, сыщи двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи (501); ф. 380. изъ первой средней, то есть изъ меньшей которая $= hk$ сдѣлай кубъ $hkmn$, получишь желаемое.

Доказ.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$, то будетъ $\div\div\ of : hk : x : fg$ по рѣшенїю; и $\overline{of}^{2} \times fg$ будетъ $= \overline{hk}^{3}$ (502); но $\overline{of}^{2} \times fg$ есть толстота призьмы efg (446), а $\overline{hk}^{3} =$ толстотѣ куба $hkmn$, слѣдовательно оные тѣла толстотою равны.

511. ЗАДАЧА. *Цилиндръ bg, котораго дїаметръ основанїя bf меньше высоты fg; превратить въ другой коего бы дїаметръ основанїя равенъ былъ высотѣ.*

ф. *Рѣшен.* Между дїаметромъ bf и высотою
381. fg сыщи двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи. Изъ первой средней, то есть изъ меньшей которая $= ef$ сдѣлай цилиндръ ed, получишь требуемое.

Доказ. Естьли положимъ что вторая средняя $= x$, то будетъ $\div\div\ bf : ef = x : fg$, причемъ $\overline{bf}^{2} \times fg = \overline{ef}^{3}$ (502); умножь оба количества чрезъ $\frac{11}{14}$, произведенїе $\frac{11}{14}\overline{bf}^{2} \times fg$ будетъ $= \frac{11}{14}\overline{fe}^{2} \times fe$; но $\frac{11}{14}\overline{bf}^{2}$ есть площадь круга дїаметра bf, $\frac{11}{14}\overline{ef}^{2}$ есть площадь круга дїаметра ef (261); того ради $\frac{11}{14}\overline{bf}^{2} \times fg =$ толстотѣ цилиндра bg, также $\frac{11}{14}\overline{fe}^{2} \times fe = \frac{11}{14}\overline{fe}^{2} \times fd =$ толстотѣ цилиндра ed (446); слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

512.

512. ЗАДАЧА. *Четверостороннюю призьму efd или кубъ, превратить въ другую gi k, что бы оной высота была равна данной высотѣ ef.*

Рѣшен. Къ данной высотѣ *ef*, къ высотѣ призьмы *fd* и къ боку *ae* основанія *ef*, сыщи четвертую пропорціональную *ab* (108); потомъ между бокомъ *ae* и четвертою пропорціональною *ab* сыщи среднюю пропорціональную *an* (172), наконецъ проведя $gh = an$ начерти квадратъ *gi*, взявъ оной за основаніе сдѣлай призьму *gik*, которой бы высота *ik* была равна данной высотѣ *ef*, получишь требуемое. ф. 382.

Доказ. Понеже $ef : fd = ae : ab$ (103), также $ae : an = an : ab$ (173); и $ae^2 : an^2 = ae : ab$ (181); посему для равенства содержаній и что $an = gh$ и $ef = ik$ будетъ $ae^2 : (an^2)\, gh^2 = (ef)\, ik : fd$ (ариф. 218), при чемъ произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ, то есть $ae^2 \times fd = gh^2 \times ik$; но $ae^2 \times fd =$ толстотѣ призмы *efd*, также $gh^2 \times ik =$ толстотѣ призмы *gik*, слѣдовательно оныя тѣла толстотою равны.

Слѣдст. I. Такимъ образомъ всякая призьма: на примѣръ трехсторонная *ead* по данной высотѣ *ef* превращается въ другую *ghik*. Ибо сдѣлавъ рѣшеніе ф. 383.

нiе какъ и прежде докажется что $\overline{ae}^{2} : \overline{gh}^{2} = (ef)\,ik : df$, но площади подобныхъ фигуръ какъ квадраты сходственныхъ боковъ; того ради (положа площадь треугольника $aef = x$ а площадь треугольника $ghi = y$) $x : y = \overline{ae}^{2} : \overline{gh}^{2}$, и для равенства содержанiй $x : y = ik : df$, причемъ $x \times df = y \times ik$ (ариф. 218), то есть толстота призмы $eafd$ = толстотѣ призмы $ghik$.

Слѣдст. II. Также превращается всякая пирамида или конусъ въ другую, по какой бы то ни было высотѣ; ибо по предъидущей теоремѣ сыскавъ къ данной высотѣ ef, высотѣ rm и къ боку ae основанiя, четвертую пропорцiональную линѣю, докажется что $\overline{ea}^{2} \times rm = \overline{gh}^{2} \times pq$, изъ коихъ каждое раздѣля на 3 будетъ $\frac{\overline{ea}^{2} \times rm}{3} = \frac{\overline{gh}^{2} \times pq}{3}$, то
ф. 382. есть толстота четверосторонной пирамиды $eafm$ = толстотѣ пирамиды $= ghip$; также изъ перваго слѣдствiя видно что $x \times (df)\,rm = y \times (ik)\,pq$,
ф. 383. изъ коихъ раздѣливъ каждое на 3 выдетъ $\frac{x \times rm}{3} = \frac{y \times pq}{3}$, то есть толстота трехсторонной пирамиды $eafm$ = толстотѣ пирамиды $ghip$.

513. ЗАДАЧА. *Четверосторонную призьму abcd или кубъ, превратить въ другую gik по основанiю $gi = \overline{gh}^{2}$.*

Рѣшен. Къ боку даннаго основанiя gh
ф. 384. и къ боку ab данной призьмы, сыщи третью пропорцiональную линѣю np (*) потомъ къ

(*) Слѣдующимъ образомъ на произвольно проведенной линѣѣ sp положи $sn = gh$ изъ точки n поставь

къ боку даннаго основанія $gh = sn$, къ третій пропорціональной np, и къ высотѣ призьмы $cd = sq$ сыщи четвертую пропорціональную qr (108); напослѣдокъ на данномъ основаніи $gi = \overline{gh}^2$, сдѣлай призьму $ghik$ которой бы высота ik была равна qr, получишь желаемое.

Доказ. Понеже $sn = gh : (no)ab = (no)ab : np$ по рѣшенію, и $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2 = gh : np$ (181); но $sn = gh : np = (sq)\ cd : qr$ или ik по рѣшенію; посему для равенства содержаній будетъ $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2 = cd : ik$, причемъ $\overline{gh}^2 \times ik = \overline{ab}^2 \times cd$ (ариѳ. 222), то есть толстота призьмы $abcd$ = толстотѣ призьмы $ghik$.

Прибавл. I. Такимъ образомъ всякая призьма какъ на прим. пятисторонная $abcde$, поданному основанію ghi превращается въ другую $ghikl$. Ибо сдѣлавши рѣшеніе какъ и прежде докажется что $\overline{gh}^2 : \overline{ab}^2$ ф.
$= cd : ik$; но площади подобныхъ фигуръ содержатся 385.
ся какъ квадраты сходственныхъ боковъ (265); того ради (положа площадь пятіугольника $ac = y$ площадь пятіугольника $gi = z$) $z : y = \overline{gh}^2 : \overline{ab}^2$, и такъ для равенства содержаній будетъ $z : y = dc : ik$, причемъ $y \times cd = z \times ik$, то есть толстота призьмы $abcde$ = толстотѣ призьмы $ghikl$.

Прибавл.

перпендикуляръ $no = ab$, проведи os, изъ точки o на концѣ линѣи os поставь перпендикуляръ op, будетъ np третья пропорціональная; ибо по свойству прямоугольнаго треугольника sop, $sn : on : np$ (122).

Прибавл: II. ТѣмЪ же самимЪ образомЪ, всякая
ф. пирамида или конусЪ *abc*, по данному основанїю *ef*
386. превращается вЪ другой *efh*. Ибо по предЪидущей
теоремѣ: сыскавЪ кЪ дїаметру основанїя *ef* и кЪ дїаметру основанїя *ab*, третью пропорцїональную *np*;
ф. потомЪ кЪ дїаметру *ef*, кЪ третїй пропорцїональной
384. *np* и кЪ высотѣ *cd* четвертую пропорцїональную *qr* $= gh$, докажется что $\overline{ef}^2 : \overline{ab}^2 = cd : gh$; но площади круговЪ содержатся какЪ квадраты дїаметровЪ; и такЪ (положа площадь круга дїаметра $ab = x$, площадь круга дїаметра $ef = y$) будетЪ $y : x = \overline{ef}^2 : \overline{ab}^2$, и вЪ разсужденїи равенства содержанїй $y : x = cd : gh$, при чемЪ $y \times gh = x \times cd$; изЪ коихЪ раздѣля каждое количество на 3, будетЪ $\frac{y \times gh}{3} = \frac{x \times cd}{3}$, то есть толстота конуса *efh*. равна толстотѣ конуса *abc*.

514. ЗАДАЧА. *Отрѣзной конусЪ abdc, превратить вЪ пятистороннюю пирамиду по данному основанїю qrs.*

Рѣшен. Сдѣлай прямоугольникЪ *gk*,
ф. котораго бЪ основанїе *gh* было равно окруж-
387. ности круга дїаметра *cd*, а высота *hk* равна $\frac{1}{2}$ радїуса *af*, потомЪ прямоугольникЪ *gk*, кругЪ *cd*, также и кругЪ *ab* превратя каждой вЪ квадратЪ, сложи оныя вмѣстѣ (323); квадратЪ равной суммѣ всѣхЪ оныхЪ плоскостей преврати вЪ правильной пятїугольникЪ *lmn*, взявЪ оной за основанїе сдѣлай пирамиду *lmne* которой бы высота *ef* была равна высотѣ *ef* конуса *abcd* наконецЪ по предЪидущей задачѣ преврати оную по данному основанїю *qrs* вЪ другую *qrsv*, получишь желаемое.

Доказ. Прямоугольникъ *gk* по § 455 есть средняя геометрическая площадь между двухъ основанїй *cd* и *ab* кунуса *abcd*, и сумма сихъ площадей = пятїугольнику *lmn* по рѣшенїю; толстота жъ конуса *abdc* = произведенїю изъ суммы показанныхъ плоскостей, то есть площади пятїугольника *lmn* чрезъ $\frac{1}{3}$ *ef* высоты конуса (460), также и толстота пятисторонной пирамиды, равна произведенїю площади того жъ пятїугольника *lmn* чрезъ $\frac{1}{3}$ *ef* высоты умноженной, того ради оныя произведенїя въ обоихъ случаяхъ равны; слѣдователно толстота конуса *abdc* = толстотѣ пирамиды *lmne*, а по рѣшенїю (512) = толстотѣ пирамиды *qrsv*.

Примѣч. Такимъ же образомъ и всякая отрѣзная пирамида превращается въ призьму, конусъ или какую пожелаешь пирамиду по данному основанїю или высотѣ.

515. ЗАДАЧА. *Шаръ x превратить въ кубъ.*

Рѣшен. Дїаметръ *mn* раздѣли на 21 часть, сдѣлай *ns* = 11 ти тѣмъ же частямъ, сыщи между дїаметромъ *mn* и *sn* двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи, изъ первой средней которая равна *gh*, сдѣлай кубъ *ghikl* получишь желаемое.

Доказ. Положимъ что вторая средняя = *y*, будетъ ∺ *mn* : *gh* : *y* : *ns* (501); чего ф. 388.

ради $\overline{mn}^3$ или $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = mn : ns$ или 21 : 11 (503); но толстота куба дїаметра $mn = abcq$ къ толстотѣ шара x, какъ 21 : 11 (475), то есть $\overline{ab}^3 : x = 21 : 11$, посему для равности содержанїй $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = \overline{ab}^3 : x$; но $\overline{ab}^3 = \overline{ab}^3$, слѣдовательно $\overline{gh}^3 = x = ghikl$.

ДРУГИМЪ ОБРАЗОМЪ.

Рѣшен. и Доказ. Около шара x, опиши цилиндръ ac, раздѣли высоту цилиндра ad на три равныя части въ f и r, будетъ цилиндръ $ae = \frac{2}{3}$ цилиндра ac = толстотѣ шара x. Преврати цилиндръ ae въ четвеространную призьму (509); а оную въ кубъ $ghikl$ (510), получишь желаемое.

516 ЗАДАЧА. ***Кубъ ad превратить въ шаръ.***

No18 ф. 389. ***Рѣшен.*** Бокъ куба ab раздѣли на 11 равныхъ частей, опредѣли $ak = 21$ тѣмъ же частямъ; между ab и ak сыщи двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи изъ первой средней gh сдѣлай шаръ z получишь желаемое.

Доказ. Есть ли положимъ что вторая средняя $= y$; то по рѣшенїю будетъ $ab : gh : y : ak$, и $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = ab : ak$ (303) или 11 : 21; но толстота шара z : къ толстотѣ куба дїаметра gh какъ 11 : 21 (475), то есть

есть $z : \overline{gh}^3 = 11 : 21$, посему $\overline{ab}^3 : \overline{gh}^3 = z : \overline{gh}^3$; но $\overline{gh}^3 = \overline{gh}^3$ слѣдовательно $\overline{ab}^3 = z =$ кубу ad.

Рѣшенїе другимъ образомъ.

Сторону куба, то есть квадратъ ac превратй въ кругъ lm (319), сдѣлай кругъ np втрое больше круга lm (330); потомъ между радїусомъ qn утроеннаго круга np, и удвоеннымъ бокомъ ab куба ad, то есть $2ab = af$ сыщи двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи; изъ первой средней gh, сдѣлай шаръ z получишь желаемое. ф. 390.

Доказ. Понеже площадь круга дїаметра $np = 3\overline{ab}^2$ по рѣшенїю; но $11 : 14 = 3\overline{ab}^2 : \overline{np}^2$, то есть площадь круга дїаметра np къ квадрату дїаметра np (261); того ради $\frac{3\overline{ab}^2 \times 14}{11} = \overline{np}^2 = pt$, которое раздѣля на 4, частное $\frac{3\overline{ab}^2}{4} \times \frac{14}{11}$ будетъ $= \overline{nq}^2 = qr$. И такъ (положимъ вторая средняя $= y$) будетъ $\div\!\div nq : gh : y : 2ab$ по рѣшенїю, и $\overline{nq}^2 \times 2ab = \overline{gh}^3$ (502); а когда на мѣсто $\overline{nq}^2$ поставится равное $\frac{3\overline{ab}^2}{4} \times \frac{14}{11}$, то будетъ $\frac{3\overline{ab}^2}{4} \times \frac{14}{11} \times 2ab = \frac{21\overline{ab}^3}{11} = \overline{gh}^3$, изъ коихъ каждое количество умножа чрезъ $\frac{11}{21}$, будетъ $\overline{ab}^3 = \frac{11}{21}\overline{gh}^3$; но $\frac{11}{21}\overline{gh}^3 =$ толстотѣ

шара z (475); слѣдовательно толстота шара z $= \overline{ab}^3$.

Примѣч. Такимъ образомъ всякiя призмы, цилиндры, пирамиды, конусы и проч. превращая каждую посредствомъ предъидущихъ задачь въ четвеpостороннюю призьму, потомъ въ кубъ и напослѣдокъ въ шаръ превратиться могутъ.

517. ЗАДАЧА. *Вырѣзокъ шара acbd превратить въ шаръ.*

Рѣшен. Кругъ радiуса ad преврати въ квадратъ gi, взявъ оной за основанiе сдѣлай призьму gm, что бы оной высота hk была равна $\frac{1}{3}$ радiуса ac, потомъ призьму gm преврати въ кубъ (510), и наконецъ по (516) въ шаръ z, получишь желаемое,

Доказ. Пусть будетъ радiусъ $ac = x$,
ф. площадь круга радiуса $ad = y$, посему
391. площадь квадрата $gi = y$ и $hk = \frac{x}{3}$ по рѣшенiю; и такъ будетъ $y \times \frac{x}{3} =$ толстотѣ части шара abd, также $gi \times hk = y \times \frac{x}{3} =$ толстотѣ призьмы gm (446); того ради толстота вырѣзка шара $acbd =$ толстотѣ призьмы gm, и равна толстотѣ шара z по рѣшенiю (510) и (516).

О СЛОЖЕНIИ ТѢЛЪ.

518. ЗАДАЧА. *Начертить конусъ равенъ двумъ даннымъ abc и def имѣющимъ равныя основанiя.*

Рѣшен.

Рѣшен. Сдѣлай основанїе конуса *kl* равно основанїю *ab* или *de*, а высоту *mn* = суммѣ высотъ $fh + gc$ данныхъ конусовъ *abc* и *def*, получишь желаемое. ф. 392.

Доказ. Положимъ площадь основанїя каждаго изъ данныхъ конусовъ $= x$, высота $cg = y$, высота другаго $hf = z$; то площадь основанїя конуса *klm* будетъ равна x, высота $mn = y + z$; того ради будетъ толстота конуса перваго $abc = \frac{x \times y}{3}$, втораго $def = \frac{x \times z}{3}$, толстота жъ конуса $klm = x \times \frac{(y + z)}{3} = \frac{x \times y + x \times z}{3}$ (452), равна суммѣ толстотъ конусовъ *abc* и *def*.

519. ЗАДАЧА. *Начертить призьму равну двумъ даннымъ defg и hikl имѣющимъ высоту c.*

Рѣшен. Сдѣлай треугольникъ *mnp* равенъ $def + hik$, и высоту po = высотѣ одной изъ данныхъ призьмъ, будетъ призьма *mpo* желаемая. ф. 393.

Доказ. Понеже толстота призьмы *defg* $= A \times c$ и толстота призьмы $hikl = b \times c$, также толстота призьмы $mpo = (A + b) \times c$ $= a \times c + b \times c$, то есть = суммѣ толстотъ двухъ данныхъ призьмъ.

Примѣч. Посредствомъ сихъ двухъ задачь, складываются конусы, цилиндры, призьмы и пирамиды равныхъ основанїй и высотъ; когда жъ оныя бу-

будутъ неравныхъ, то надлежитъ ихъ превращать по одному основанію или высотѣ, и потомъ поступать какъ показано.

520. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ, равенъ двумъ не равнымъ кубамъ* mno *и* gbd.

Рѣшен. Сыщи къ боку большаго куба
ф. ab и меньшаго mn, четвертую пропор-
394. ціональную линѣю ah, которую придай
къ боку большаго куба ab, потомъ между be и bh, сыщи двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней сдѣлай кубъ qpr, который будетъ $=$ суммѣ кубовъ mno и gbd.

Доказ. Естьли положимъ что третья пропорціональная равна t, то будетъ $\div$ $ab : mn : t : ah$, причемъ $\overline{ab}^2 \times ah$ или $\overline{al}^2 \times ah$ $= \overline{mn}^3$, то есть толстота призьмы $fahk$ $=$ кубу nmo, посему призьма $dbhk$ $=$ двумъ кубамъ $bad + nmo$; а по рѣшенію (510) равна кубу qpr, слѣдовательно кубъ qpr равенъ двумъ кубамъ $bad +$ nmo.

Примѣч. Такимъ же образомъ складываются шары
и всѣ подобныя правильныя и неправильныя тѣла,
только вмѣсто боковъ кубовъ, должно употреблять
ф. діаметры шаровъ, или бока правильныхъ и непра-
394. вильныхъ тѣлъ. Ибо толстоты шаровъ также подобныхъ правильныхъ и неправильныхъ тѣлъ содержатся между собою какъ кубы діаметровъ или сходственныхъ боковъ. На прим. ежели ложить

шаръ

шаръ x и y, то къ діаметру ab большаго шара y, и къ діаметру mn меньшаго x сыщи четвертую пропорціональную линѣю ah; и придавъ оную къ діаметру ab большаго шара y, сыщи (501) между діаметромъ ab и линѣею bh двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней pq сдѣлай шаръ z, который будетъ $= x + y$. Ибо по предъидущей задачѣ докажется что $\overline{pq}^3 = \overline{ab}^3 + \overline{mn}^3$; а по (477) $y : \overline{ab}^8 = x : \overline{mn}^3 = z : \overline{qp}^3$; посему $y + x : \overline{ab}^3 + \overline{mn}^3 = z : \overline{pq}^3$; но $\overline{pq}^3 = \overline{ab}^3 + \overline{mn}^8$, слѣдовательно $z = y + x$. Тожъ должно разумѣть и о прочихъ подобныхъ тѣлахъ.

О ВЫЧИТАНІИ ТѢЛЪ

521. ЗАДАЧА. *Призьму $defg$ вычесть изъ призьмы $pmno$, которыя одной высоты но неравнаго основанія.*

Рѣшен. Вычти основаніе призьмы def ф.
изъ основанія mnp, оставшую плоскость 393.
которая равна hik возми за основаніе, а высоту hl сдѣлай равну высотѣ po, будетъ призьма $kihl$ равна разности данныхъ призьмъ

Доказ. Положимъ площадь основанія $def = x$, $mnp = y$, высота призьмъ $= c$, посему основаніе $hik = y - x$, и такъ будетъ толстота призьмы $defg = x \times c$, призьмы $mpo = y \times c$, а призьмы $hikl = (y - x) \times c = y \times c - x \times c =$ разности двухъ данныхъ призьмъ $defg$ и mpo.

522. ЗАДАЧА. *Конусъ abc вычесть изъ конуса klm, кои одного основанiя но неравныхъ высотъ.*

ф. 392. *Рѣшен.* Сдѣлай основанiе конуса *de* равно основанiю *ab* или *kl*, а высоту онаго *hf* равну разности высотъ данныхъ конусовъ, будетъ конусъ *def* желаемой остатокъ.

Доказ. Положимъ основанiе каждаго конуса $= x$, высота конуса $abc = y$, $klm = z$; по сему высота конуса $def = z - y$, того ради будетъ толстота конуса $abc = \frac{x \times y}{3}$, конуса $klm = \frac{x \times z}{3}$, конуса $def = \frac{(z - y)}{3} \times x = \frac{x \times z - x \times y}{3} =$ разности конусовъ *abc* и *klm*.

Примѣч. Такимъ образомъ вычитаются пирамиды изъ пирамидъ, цилиндры изъ цилиндровъ и призьмы изъ призьмъ, когда оныя имѣютъ равныя основанiя или высоты; когда жъ онѣ будутъ не равныхъ, то надлежитъ ихъ превращать по одному основанiю или высотѣ, а потомъ съ оными поступать, какъ въ предъидущихъ задахъ показано.

523. ЗАДАЧА. *Кубъ mno вычесть изъ куба acf.*

ф. 395. *Рѣшен.* Сыщи (109) къ боку большаго куба *ab* и меньшаго *mn*, четвертую меньшую пропорцiональную линѣю *bg*, вычти оную изъ *ab*, потомъ сыщи между бокомъ *ab* или *bc* и остаткомъ *ag*

двѣ

двѣ среднія пропорціональныя линѣи, изъ первой средней qr сдѣлай кубъ qrt, получишь желаемое.

Доказ. Ежели положимъ что третья пропорціональная линѣя $= v$; то будетъ $\div\div bc : mn : v : bg$ (109); причемъ $\overline{bc}^2 \times bg = \overline{mn}^3$ (502), то есть толстота призьмы $ghdc =$ кубу nmo; посему призьма $afhga =$ разности двухъ кубовъ bad и nmo, а по рѣшенію (510) равна кубу qrt, слѣдовательно кубъ $qrt =$ разности кубовъ bad и nmo.

Примѣч. Такимъ же образомъ вычитаются шары и всѣ подобныя правильныя и неправильныя тѣла; причемъ вмѣсто боковъ кубовъ, надлежитъ брать діаметры шаровъ, или сходственные бока подобныхъ тѣлъ, и поступать какъ въ сей задачѣ показано; ибо толстоты шаровъ, также подобныхъ правильныхъ и неправильныхъ тѣлъ, содержатся между собою какъ кубы діаметровъ или сходственныхъ боковъ.

О УВЕЛИЧИВАНІИ ТѢЛЪ.

524. ЗАДАЧА. *Сдѣлать четвеpостороннюю пирамиду втрое больше данной acd, по одной высотѣ.*

Рѣшен. Начерти квадратъ gi втрое больше квадрата ac (330); сдѣлай высоту kl пирамиды $ghik$, равну высотѣ ed пирамиды $abcd$, получишь требуемое. ф. 396.

Доказ. Понеже толстоты пирамидъ одной высоты содержатся какъ ихъ основанія (448); но основаніе *gi* втрое больше основанія *ac*, того ради и толстота пирамиды *ghik* втрое больше пирамиды *abcd*.

525. ЗАДАЧА. *Сдѣлать конусъ вдва съ четвертью раза больше даннаго abc, что бы былъ одного основанія съ даннымъ.*

ф. 397. *Рѣшен.* Продолжа *cd*, опредѣли высоту конуса $de = 2\frac{1}{4}\ cd$, сдѣлай на основаніи *ab*, конусъ *abe* получишь желаемое.

Доказ. Положимъ основаніе $ab = x$, будетъ толстота конуса $abc = \frac{x \times cd}{3}$, конуса $abe = \frac{x \times ed}{3}$; посему $\frac{x \times cd}{3} : \frac{x \times ed}{3} = cd : ed$ (по раздѣленіи на $\frac{x}{3}$); но *ed* въ $2\frac{1}{4}$ больше *cd*, слѣдовательно и толстота конуса *abe* въ $2\frac{1}{4}$ раза больше конуса *abc*.

Примѣч. Такимъ образомъ призьмы, цилиндры и всѣ пирамиды увеличиваются.

526. ЗАДАЧА. *Данную пирамиду q увеличить вдва съ половиною раза больше, въ параллель основанію ade.*

ф. 398. *Рѣшен.* Сыщи между бокомъ *cd* и $2\frac{1}{2}$ онаго, двѣ среднія пропорціональныя линѣи (501), сдѣлай *bc* равну первой средней,

проведи

проведи bg, bh и gh въ параллель бокамъ основанїя ade, будетъ пирамида z желаемая.

Доказ. Естьли положимъ что вторая средняя $= y$: то будетъ $\div cd : bc = y : 2\frac{1}{2} cd$ по рѣшенїю, а по (503) $\overline{cd}^3 : \overline{bc}^3 = cd : 2\frac{1}{2} cd$; но толстоты подобныхъ тѣлъ какъ кубы сходственныхъ боковъ; того ради $q : z = \overline{cd}^3 : \overline{bc}^3$, и для равности содержанїй $q : z = cd : 2\frac{1}{2} cd$; но $2\frac{1}{2} cd$ вдва съ половиною раза больше cd, слѣдовательно z въ $2\frac{1}{2}$ раза больше q.

Примѣч. Такимъ образомъ всякїя пирамиды иконусы во столько разъ увеличиваются, во сколько потребно будетъ.

527. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ fek втрое больше даннаго bad.*

Рѣшен. Продолжа ab опредѣли $ag = 3ab$, потомъ сыщи между ab и утроеннымъ бокомъ ag двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи, изъ первой средней ef сдѣлай кубъ fek, которой будетъ втрое больше даннаго bad. ф. 399.

Доказ. Положа вторую среднюю $= x$, будетъ $\div ab : ef : x : ag$ по рѣшенїю; а по (503) $\overline{ab}^3 : \overline{ef}^3 = ab : ag$, но $ag = 3ab$ слѣдовательно $\overline{ef}^3 = 3\overline{ab}^3$.

528. ЗАДАЧА. *Сдѣлать шаръ y, чтобъ къ оному данной шаръ x содержался какъ 4 : 9, то есть что бы шаръ y былъ въ $2\frac{1}{4}$ раза болѣе даннаго x.*

ф. *Рѣшен.* Діаметръ ab даннаго шара x
400. раздѣли на 4 равныя части, продолжа ab опредѣли $ae = 9$ти тѣмъ же частямъ; потомъ сыщи между ab и ae двѣ средніи пропорціональныя линѣи, изъ первой средней сдѣлай шаръ y, получишь желаемое.

Доказ. Пусть вторая средняя $= z$, то будетъ ∺ $ab : cd : z : ae$, и $\overline{ab}^3 : \overline{cd}^3 = ab : ae$ (503); но $x : y = \overline{ab}^3 : \overline{cd}^3$ (477), а для равенства содержаній $x : y = ab : ae$; но $ab : ae = 4 : 9$, слѣдовательно и $x : y = 4 : 9$.

Примѣч. Такимъ образомъ кубы и всѣ правильныя тѣла увеличиваются во столько разъ, восколько потребно будетъ.

О ДѢЛЕНІИ ТѢЛЪ.

529. ЗАДАЧА. *Сдѣлать пирамиду $abcd$ втрое меньше данной пирамиды $ghik$, что бы оныя были одной высоты.*

ф. *Рѣшен.* Раздѣли основаніе gi пирамиды
396. $ghik$ на три равныя части (351), сдѣлай квадратъ $ac = \frac{1}{3}\, gi$, потомъ взявъ оной за основаніе опредѣли высоту $ed = kl$, будетъ пирамида $abcd = \frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

Доказ.

Доказ. Понеже толстоты пирамидъ одной высоты, содержатся какъ ихъ основанїя, того ради $ghik : abcd = gi : ac$; но $ac = \frac{1}{3} gi$, слѣдовательно и $abcd = \frac{1}{3}$ пирамиды $ghik$.

530. ЗАДАЧА. *Сдѣлать конусъ $abg = \frac{1}{4}$ даннаго конуса abc, что бы оныя были равнаго основанїя.*

Рѣшен. Раздѣля высоту cd на четырѣ равныя части, сдѣлай конусъ abg, чтобъ онаго основанїе ab было равно основанїю ab даннаго конуса abc, а высота $gh = \frac{1}{4}$ высоты cd, получишь желаемое. ф. 401.

Доказ. Есть ли положимъ что основанїе каждаго конуса $= x$, то будетъ толстота конуса $abc = \frac{x \times cd}{3}$, конуса $abg = \frac{x \times gh}{3}$; того ради $\frac{x \times cd}{3} : \frac{x \times gh}{3} = cd : gh$ (поразделенїи на $\frac{x}{3}$); но gh вчетверо меньше cd, слѣдовательно и конусъ abg вчетверо меньше конуса abc.

Примѣч. Такимъ образомъ призьмы и цилиндры въ желаемыя части дѣлятся.

531. ЗАДАЧА. *Пирамиду ecf раздѣлить на три равныя части Плоскостьми параллельными основанїю aec.*

Рѣшен. Раздѣли ef на три равныя части въ m и l, сыщи между ef и mf двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи, опредѣли ф. 402.

fi

fi равну первой средней, прорѣжъ изъ i плоскостію ik параллельною основанію eac, будетъ пирамида ikf, третья часть пирамиды ecf. Потомъ сыщи между ef и fl двѣ среднія пропорціональныя линѣи, сдѣлай fg равну первой средней, изъ g прорѣжъ плоскостію gh параллельно основанію eac, будетъ пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды ecf; а остатокъ $abhg = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf.

Доказ. Положимъ вторая средняя $= x$, то будетъ $\div\div\ ef : fi : x : fm$ по рѣшенію, и $\overline{ef}^3 : \overline{fi}^3 = ef : fm$ (503); изъ подобныхъ же пирамидъ $ecf : ikf = \overline{ef}^3 : \overline{fi}^3$ (478); посему $ecf : ikf = ef : fm$ (ариф. 218); но $fm = \frac{1}{3}\ ef$ слѣдовательно пирамида $ikf = \frac{1}{3}\ ecf$; такимъ же образомъ докажется что пирамида $ghf = \frac{2}{3}$ пирамиды ecf; того ради часть $ikhg = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf, и часть $ghce = \frac{1}{3}$ пирамиды ecf.

532. ЗАДАЧА. *Отъ конуса abc отдѣлить $\frac{4}{7}$ въ параллель основанію ab.*

ф. **Рѣшен.** Раздѣли ac на 7 равныхъ час-
403. тей, отсчитай отъ c до g четыре части, сыщи между ac и cg двѣ среднія пропорціональныя линѣи, сдѣлай cd равну первой средней; прорѣжъ изъ d плоскостію de параллельно основанію ab, будетъ конусъ $dec = \frac{4}{7}$ конуса abc.

Доказ.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$, будетъ ∺ $ac : dc : y : cg$ (501); и $\overline{ac}^{3} : \overline{dc}^{3} = ac : cg$ (503); также $abc : dec = \overline{ac}^{3} : \overline{dc}^{3}$ (478); того ради $abc : dec = ac : cg$ (ариф. 218); но $cg = \frac{4}{7}\, ac$, слѣдовательно и $dec = \frac{4}{7}\, abc$.

533. ЗАДАЧА. *Сдѣлать кубъ равенъ $\frac{3}{5}$ куба bad.*

Рѣшен. Раздѣли бокъ куба ab на 5 равныхъ частей, сыщи между бокомъ ab куба bad, и тремя пятинами онаго ah, двѣ среднїя пропорцїональныя линѣи изъ первой средней kl сдѣлай кубъ lkm получишь желаемое. ф. 404.

Доказ. Пусть вторая средняя $= x$, будетъ ∺ $ab : kl : x : ah$, и $\overline{ab}^{3} : \overline{kl}^{3} = ab : ah$ (503); но $ah = \frac{3}{5}\, ab$, слѣдовательно $\overline{kl}^{3} = \frac{3}{5}\, \overline{ab}^{3}$.

Примѣч. Такимъ же образомъ опредѣляются, шары, и подобныя правильныя и неправильныя тѣла равныя требуемымъ частямъ данныхъ шаровъ и подобныхъ правильныхъ и неправильныхъ тѣлъ; только вмѣсто боковъ кубовъ должно употреблять дїаметры шаровъ, а въ прочемъ поступать по вышеписанному.

534. ЗАДАЧА. *узнать сколько разъ шаръ y содержится въ шарѣ x.*

Рѣшен.

ф. 405. *Рѣшен.* Къ діаметру cd и cb сыщи четвертую пропорціональную линѣю fh (109); будетъ шаръ y содержаться въ шарѣ x столько разъ, сколько діаметръ cd содержится въ четвертой пропорціональной fh.

Доказ. Понеже $cd : cb = (de)\ cb : bf = (eg)\ bf : fh$ (109), то есть будетъ ∺ $cd : cb : bf : fh$; посему $\overline{cd}^3 : \overline{cb}^3 = cd : fh$ (503); также $y : x = \overline{cd}^3 : \overline{cb}^3$ (477), и такъ для равенства содержаній будетъ $y : x = cd : fh$.

Примѣч. Такимъ образомъ познается содержаніе кубовъ и всѣхъ подобныхъ правильныхъ и не правильныхъ тѣлъ въ другихъ данныхъ подобныхъ тѣлахъ.

КОНЕЦЪ ВТОРОЙ ЧАСТИ.





ПОГРѢШНОСТИ

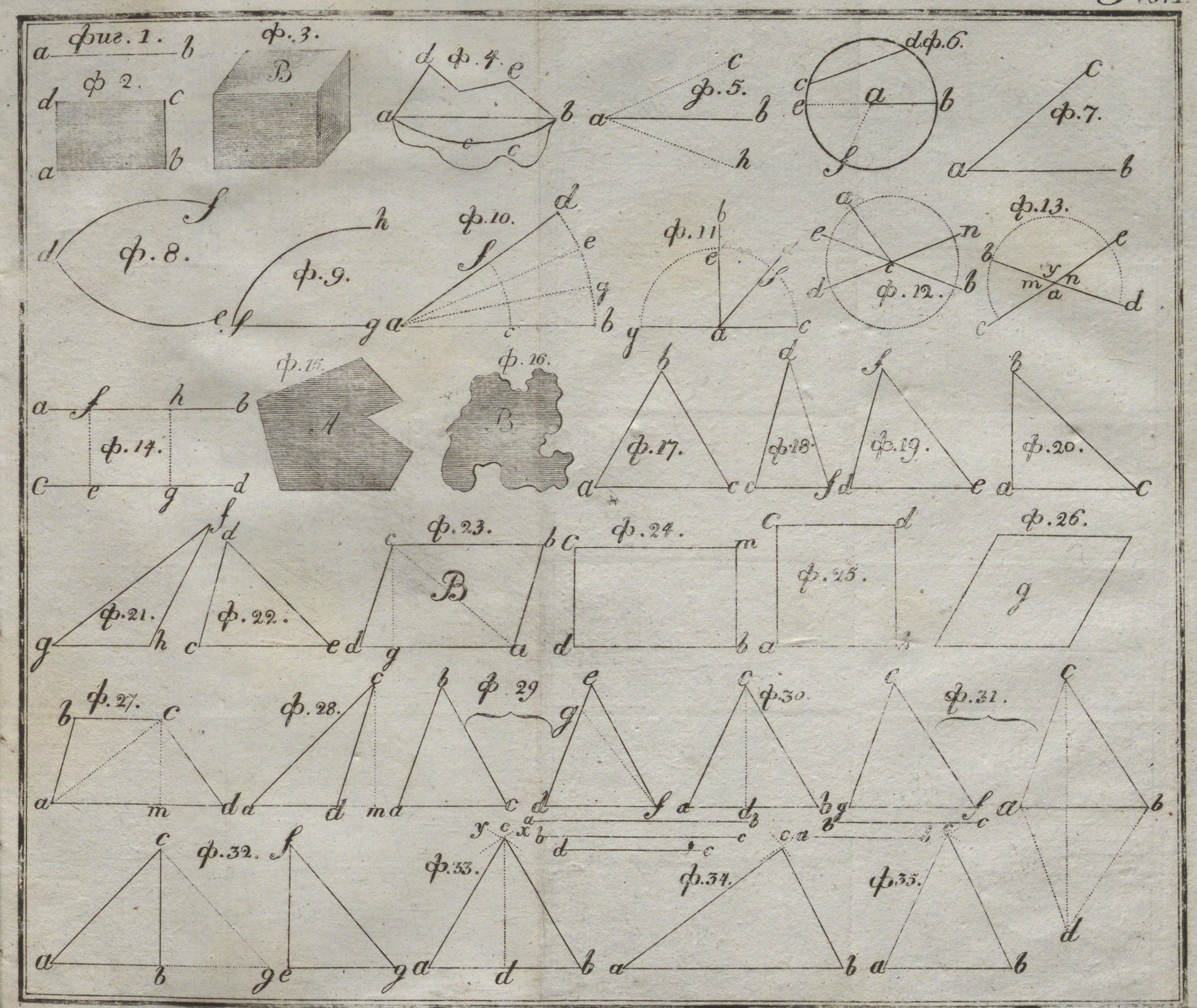
страницы		строки		напечатано		читай
7	-	2	-	*ab*	-	*eb*
12	-	8	-	*ac*	-	*ae*
14	-	12	-	*abe*	-	*abc*
53	-	27	-	*agb*	-	*bag*
54	-	7	-	$\frac{1}{2}gh$	-	$\frac{1}{2}dh$
58	-	16	-	*ag*	-	*ac*
		18	-	*be*	-	*bc*
60	-	18	-	*fg*	-	*eg*
64	-	14	-	*gd*	-	9*d*
71	-	7		изъ найденнаго.		изъ даннаго
96	-	24		*ab* + (*ac*) *af*.		(*ab*) *af* + *ac*
116	-	21		пролжи	-	продолжи
118	-	13		хорды *de*	-	хорды *dc*
120	-	1		треугольникъ		треуголь-никовъ
		2	-	*de*	-	*dc*
		16	-	*bc*	-	*bd*
140	-	21	-	$\overline{ac}$	-	$\overline{ac}^2$
143	-	6	-	*ad*	-	*ab*
154	-	7	-	какакъ	-	какъ
157	-	5	-	*bai*	-	*bac*
158	-	16	-	и *efm*	-	и *fem*
162	-	24	-	$\frac{1}{15}fam$	-	$\frac{1}{15}fxm$
169	-	8	-	Мецїво	-	Мецїево
183	-	29	-	(26)	-	(266)
206	-	16	-	*abf*	-	*dbf*
209	-	28 и 29		въ $2\frac{3}{4}$	-	въ $2\frac{2}{3}$
216	-	20	-	*abdgc*	-	*abdge*
218	-	12	-	*ach* + *acd*	-	*dch* + *acd*
221	-	13	-	*abc*	-	*abd*

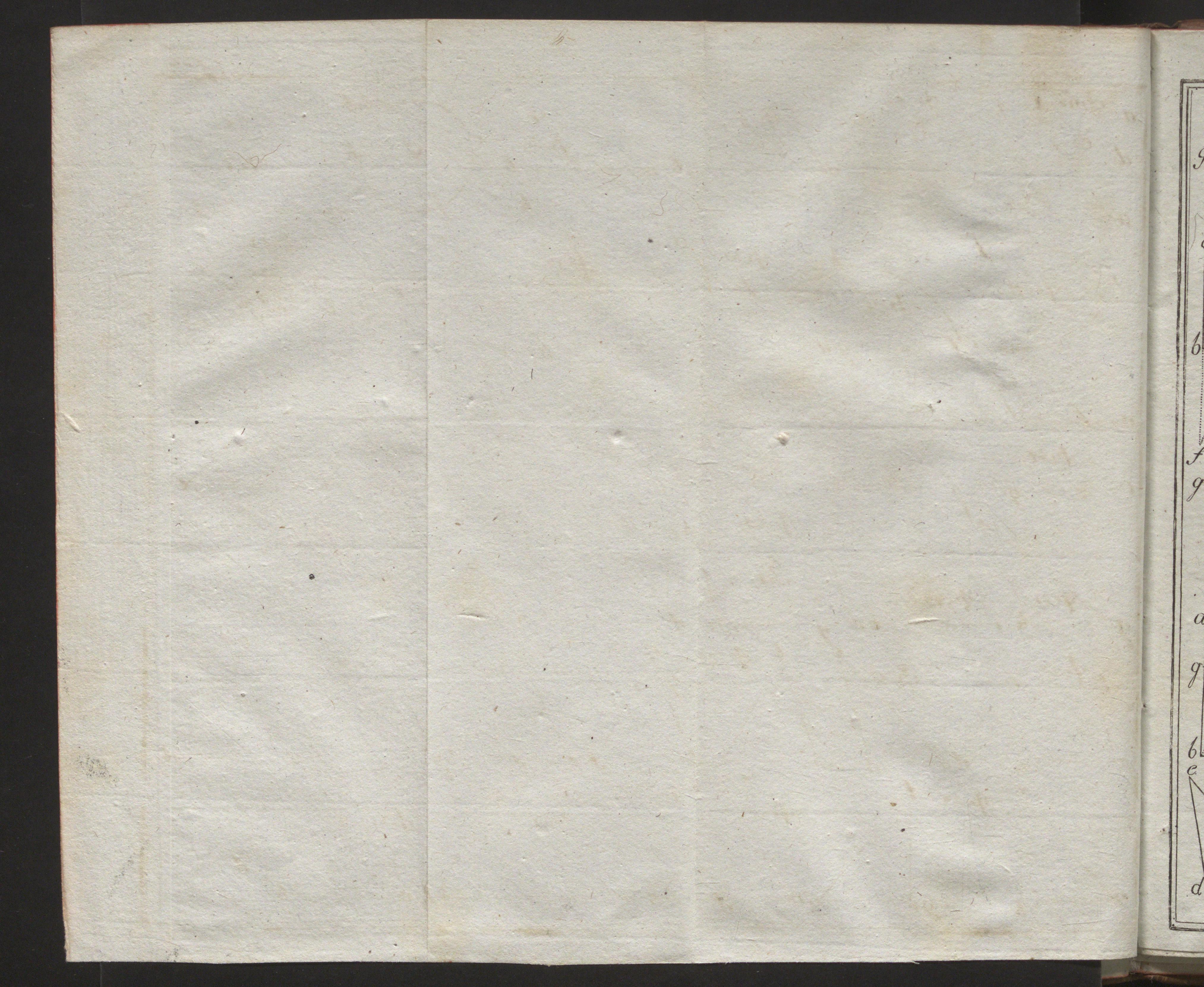
223

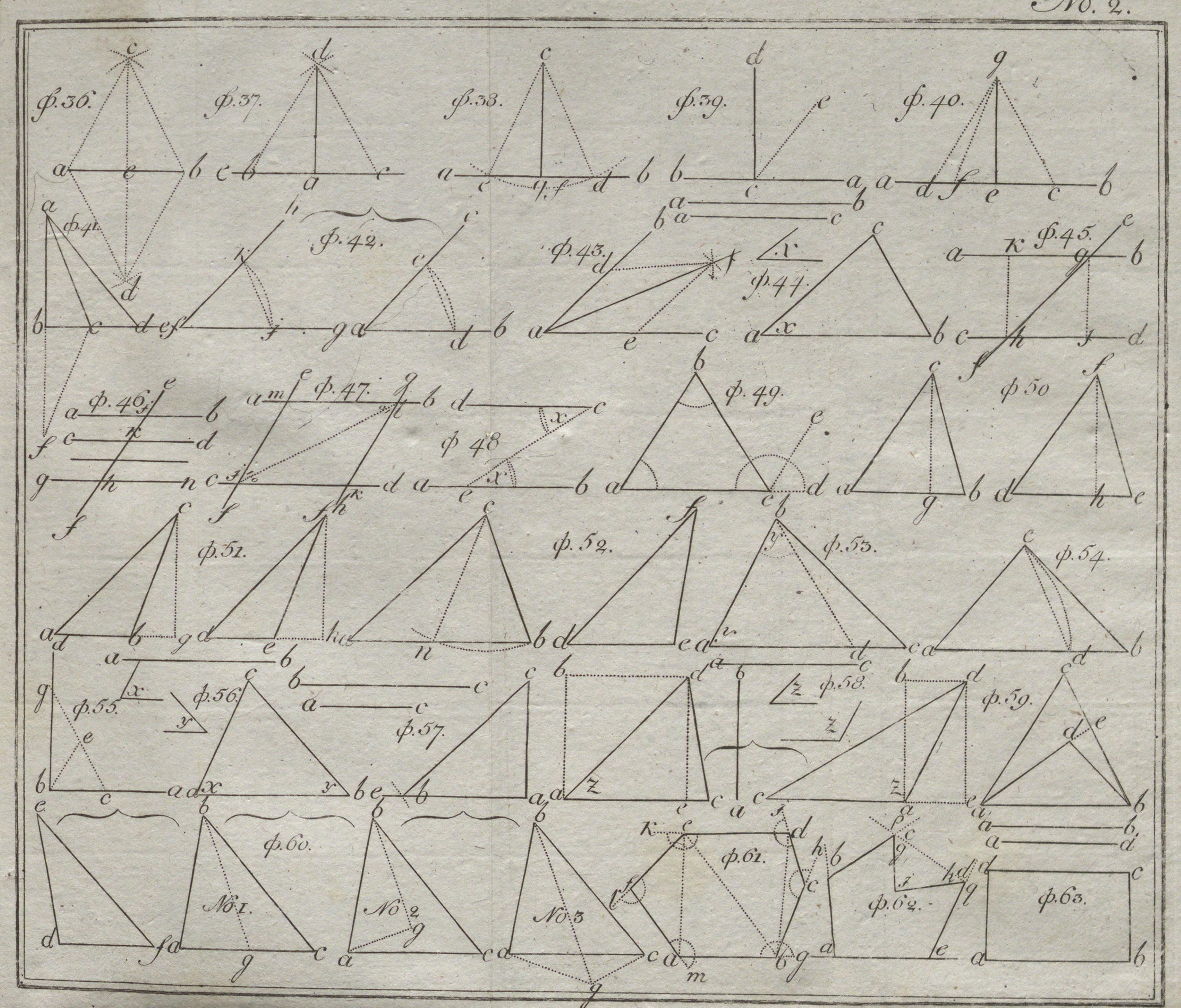
223	14	ф. 268	ф. 260
225	31	*afg*	*gdf*
231	6	*mcg*	*msg*
249	3	*h*	*n*
251	23	*acb* и *acd*.	*bac* и *cad*
254	7	суммѣ бо.	суммѣ боковъ
258	25	и *df*	и *di*
265	28	*eh*	*ch*
266	8	(*cq*) *hc*	(*sq*) *hc*
268	8	*lm*	*em*
	18	*bcv*	*bav*
273	23	полукруга.	полкруга
277	16	дïамет. *ad*.	дïамет. *ab*
307	5	$\frac{1121}{3}$	$\frac{1122}{3}$
310	20	*aizf*	*aezf*
320	20	$\sqrt[2]{4200'''}$	$\sqrt[3]{4200'''}$
347	8	*bg*	*eg*

Наставленïе переплетчику

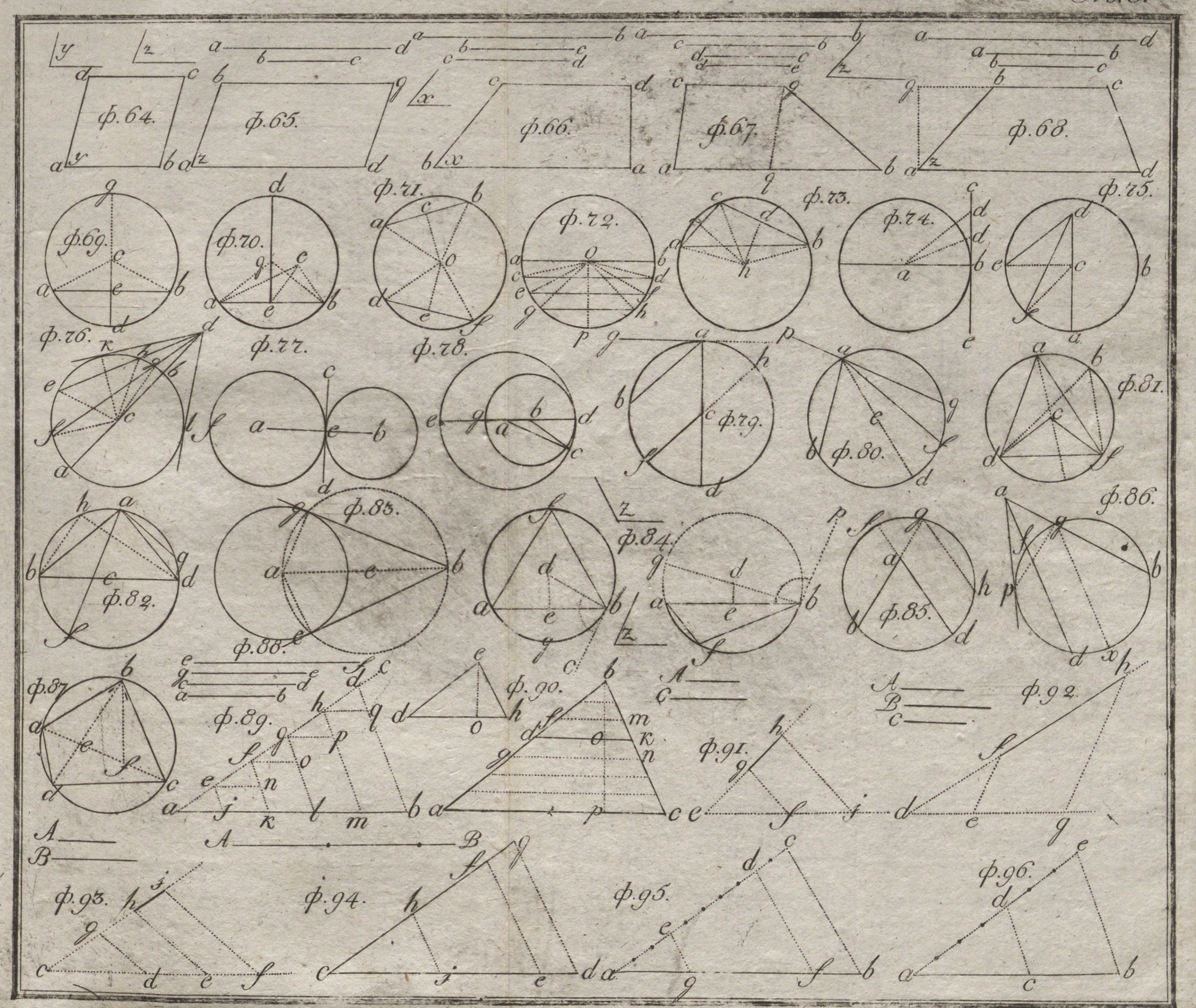
Чертежи сея книги должно поставить такъ, что бы лѣвая рамка каждаго чертежа находилась у самаго обрѣза книги; дабы не подымая книжныхъ листовъ, можно было на вынутомъ изъ книги чертежѣ, обозрѣть всѣ изображенныя фигуры.

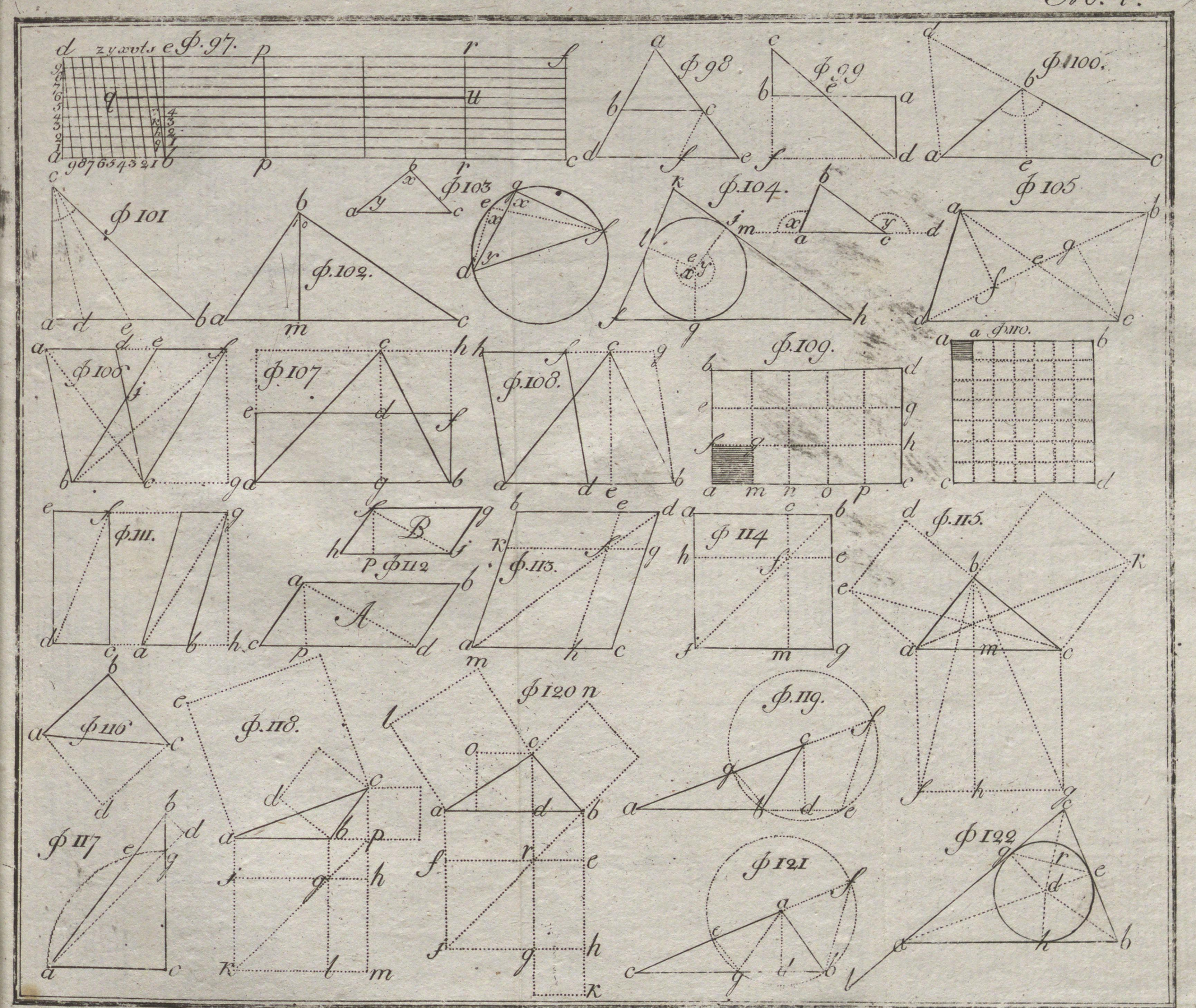

фиг. 1.
ф. 2.
ф. 3.
ф. 4.
ф. 5.
ф. 6.
ф. 7.
ф. 8.
ф. 9.
ф. 10.
ф. 11
ф. 12.
ф. 13.
ф. 14.
ф. 15.
ф. 16.
ф. 17.
ф. 18.
ф. 19.
ф. 20.
ф. 21.
ф. 22.
ф. 23.
ф. 24.
ф. 25.
ф. 26.
ф. 27.
ф. 28.
ф. 29
ф. 30.
ф. 31.
ф. 32.
ф. 33.
ф. 34.
ф. 35.

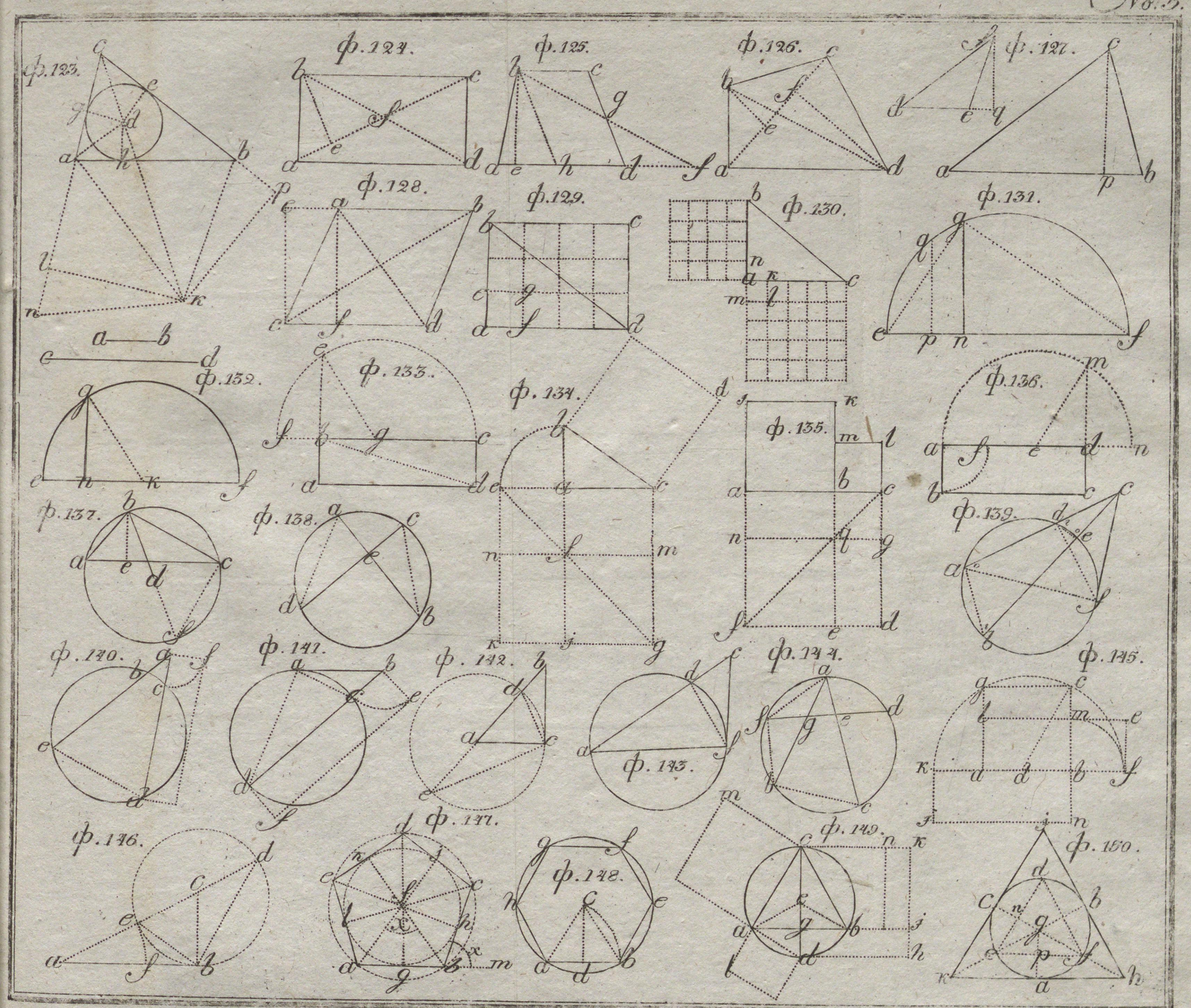

b
f
g
a
g
b
c
d

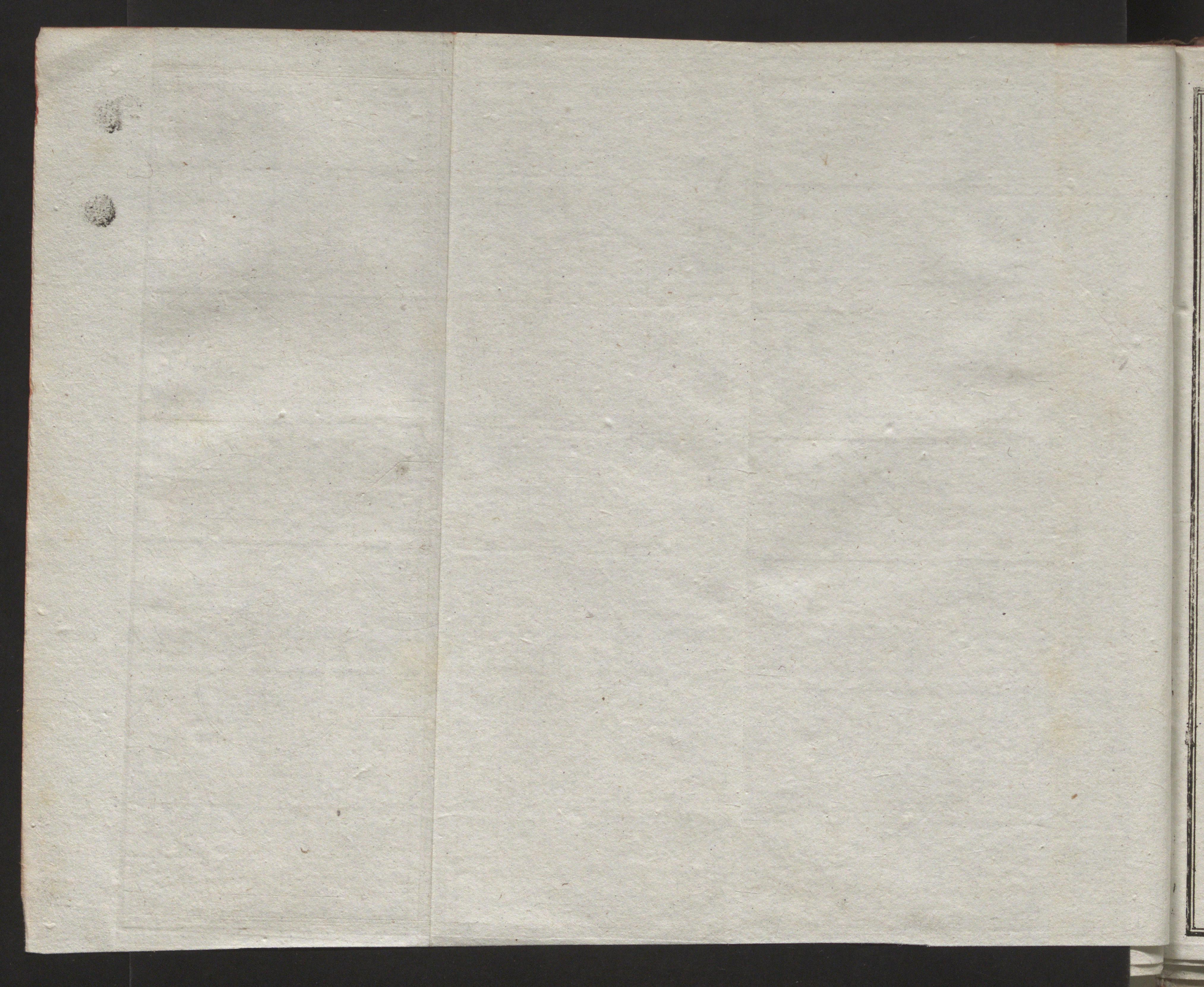

φ. 36.
φ. 37.
φ. 38.
φ. 39.
φ. 40.
φ. 41.
φ. 42.
φ. 43.
φ. 44.
φ. 45.
φ. 46.
φ. 47.
φ 48.
φ. 49.
φ 50.
φ. 51.
φ. 52.
φ. 53.
φ. 54.
φ. 55.
φ. 56.
φ. 57.
φ. 58.
φ. 59.
φ. 60.
No. 1.
No. 2.
No. 3.
φ. 61.
φ. 62.
φ. 63.

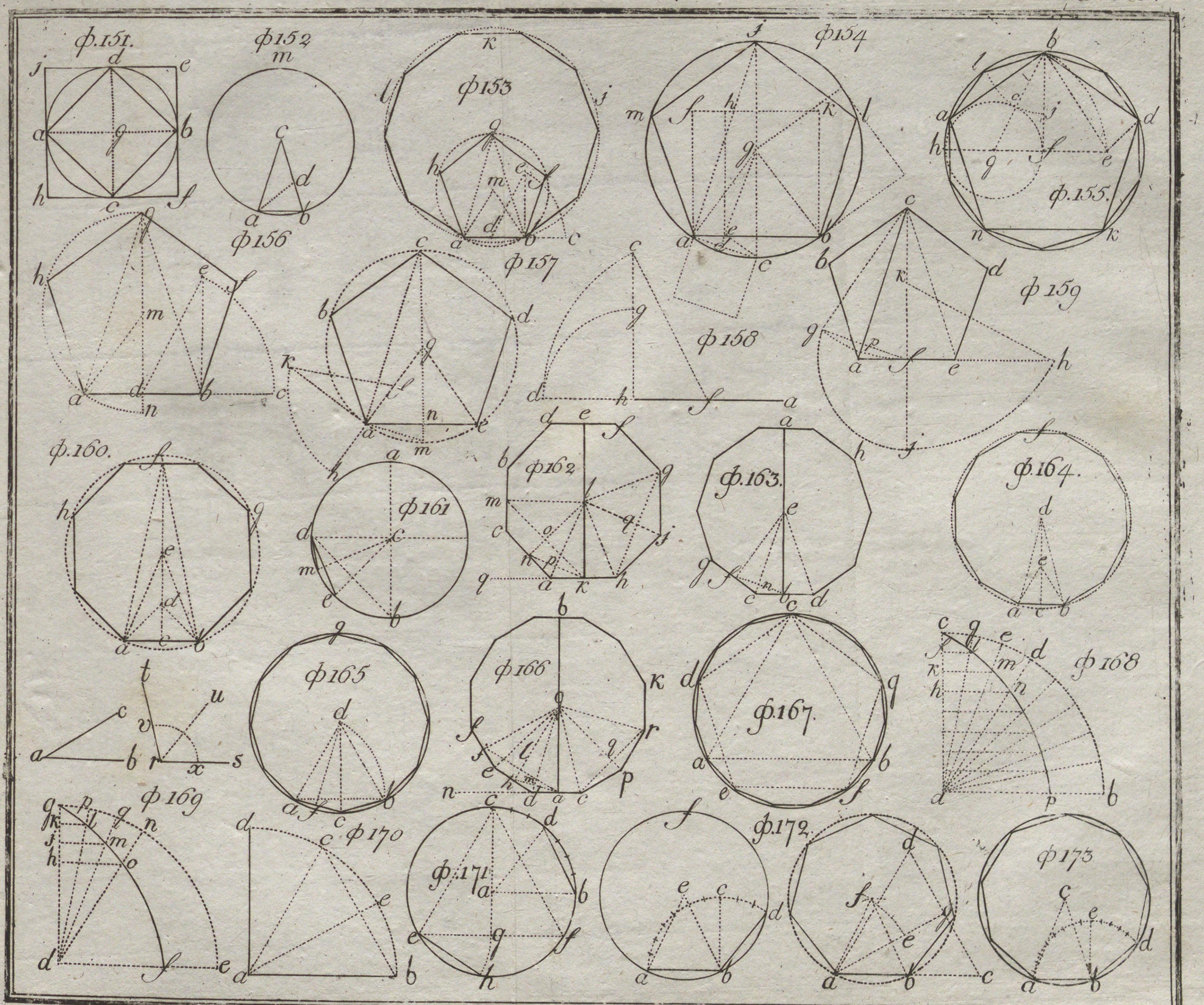
No. 3.

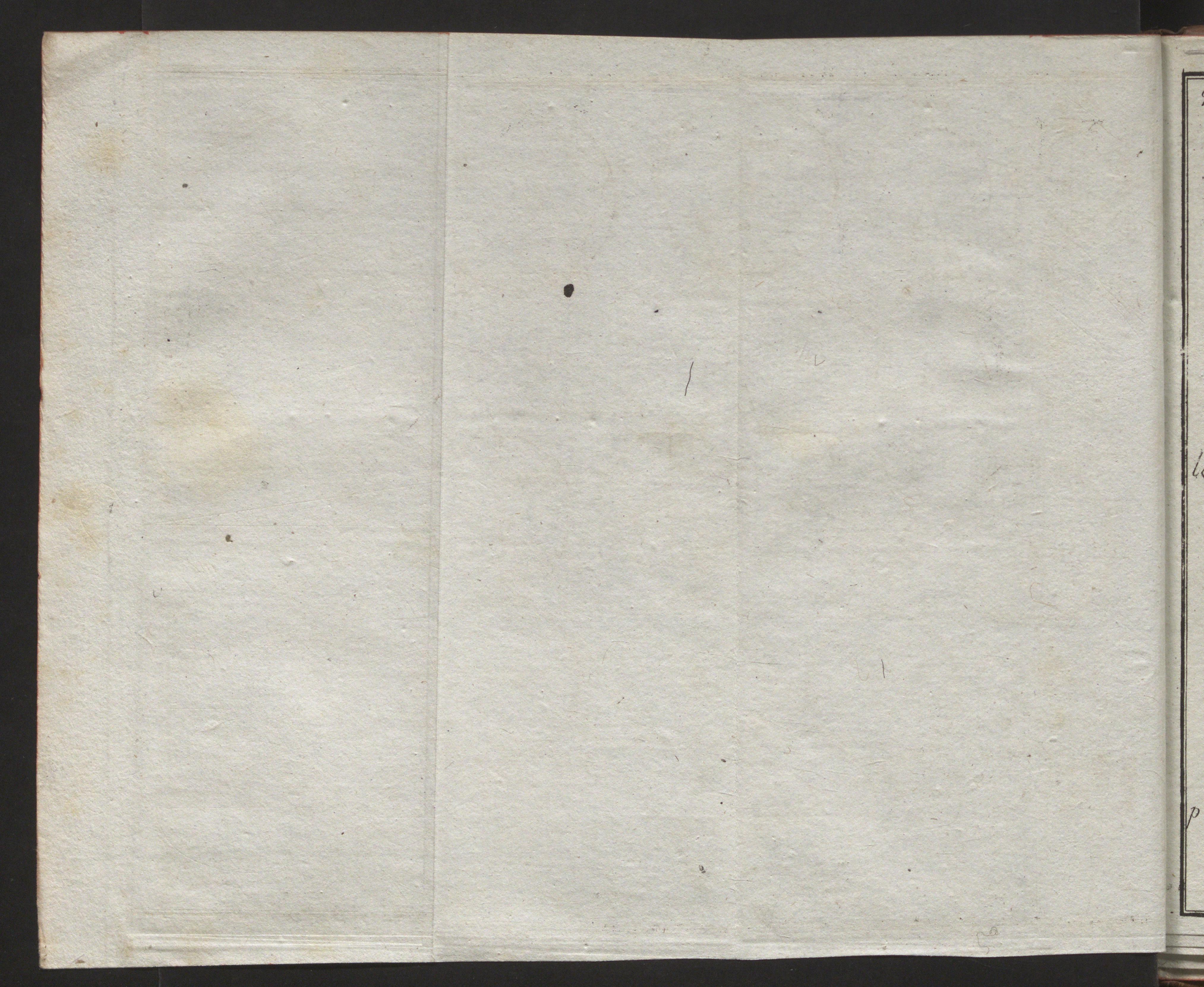

ф. 64.
ф. 65.
ф. 66.
ф. 67.
ф. 68.
ф. 69.
ф. 70.
ф. 71.
ф. 72.
ф. 73.
ф. 74.
ф. 75.
ф. 76.
ф. 77.
ф. 78.
ф. 79.
ф. 80.
ф. 81.
ф. 82.
ф. 83.
ф. 84.
ф. 85.
ф. 86.
ф. 87.
ф. 88.
ф. 89.
ф. 90.
ф. 91.
ф. 92.
ф. 93.
ф. 94.
ф. 95.
ф. 96.

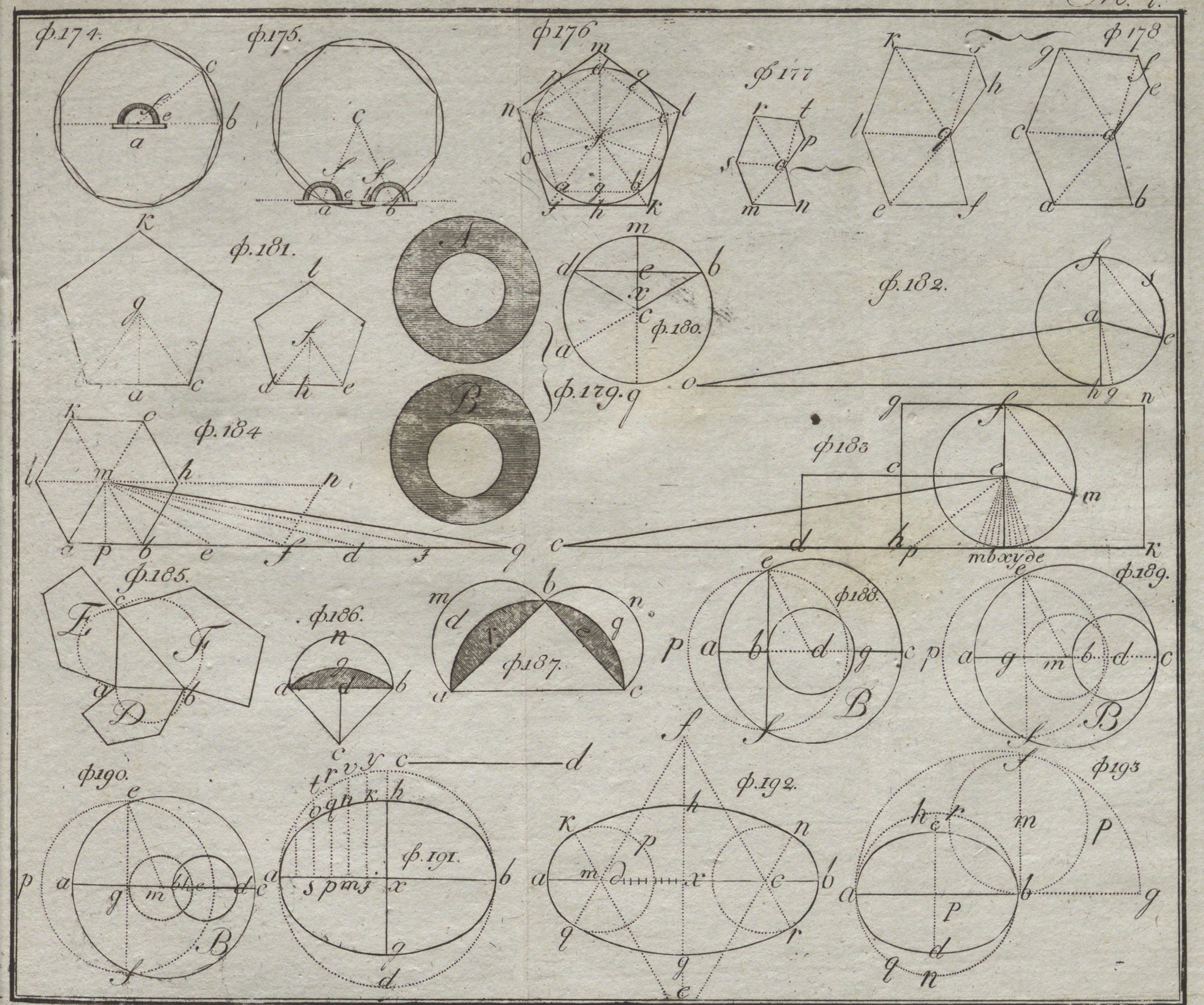

ф. 97.
ф 98
ф 99
ф 100.
ф 101
ф. 102.
ф 103
ф. 104.
ф 105
ф 106
ф. 107
ф. 108.
ф. 109.
ф. 110.
ф. 111.
ф 112
ф. 113.
ф 114
ф. 115.
ф 116
ф 117
ф. 118.
ф. 119.
ф 120
ф 121
ф 122

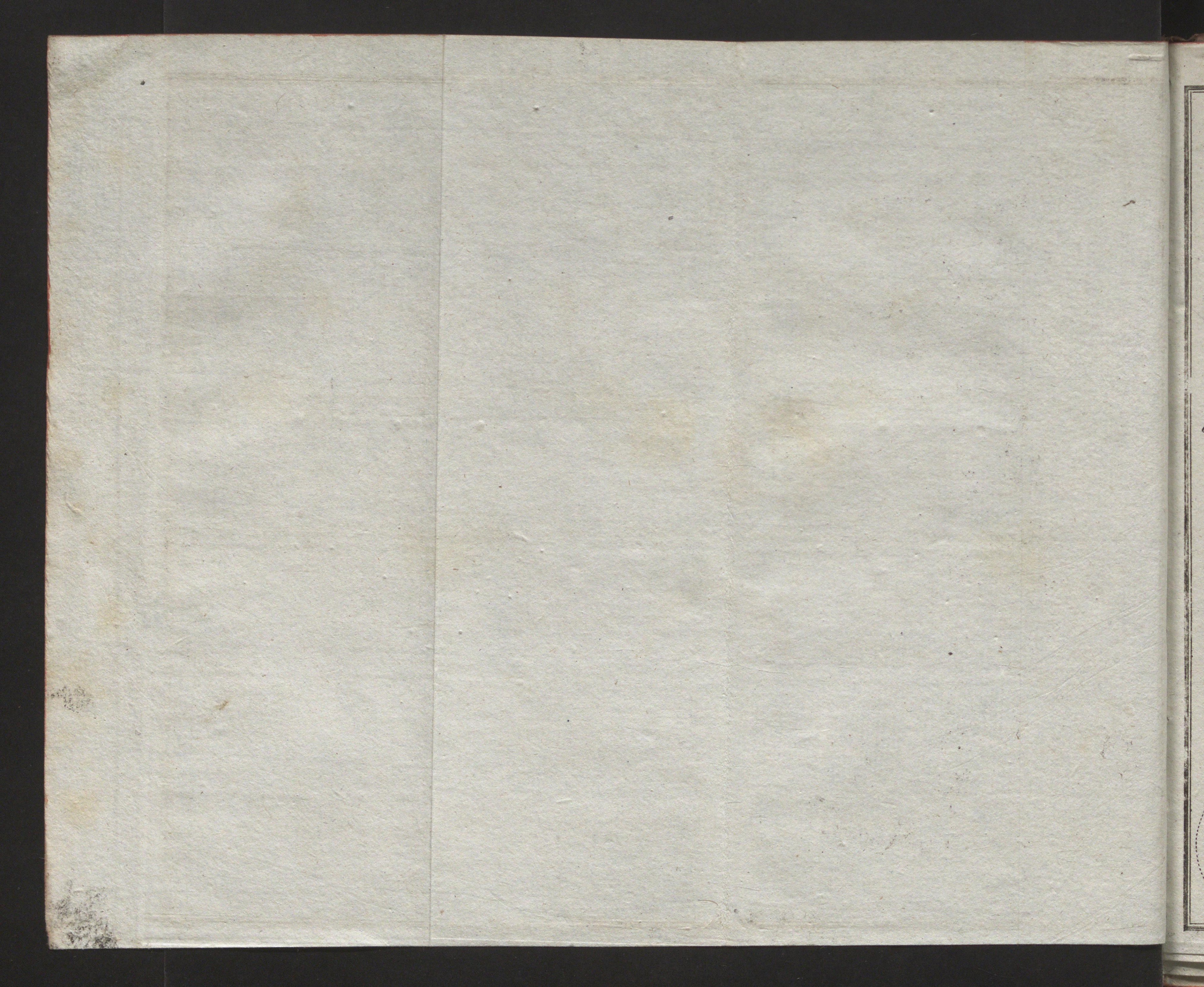

№ 5.
ф.123.
ф.124.
ф.125.
ф.126.
ф.127.
ф.128.
ф.129.
ф.130.
ф.131.
ф.132.
ф.133.
ф.134.
ф.135.
ф.136.
ф.137.
ф.138.
ф.139.
ф.140.
ф.141.
ф.142.
ф.143.
ф.144.
ф.145.
ф.146.
ф.147.
ф.148.
ф.149.
ф.150.

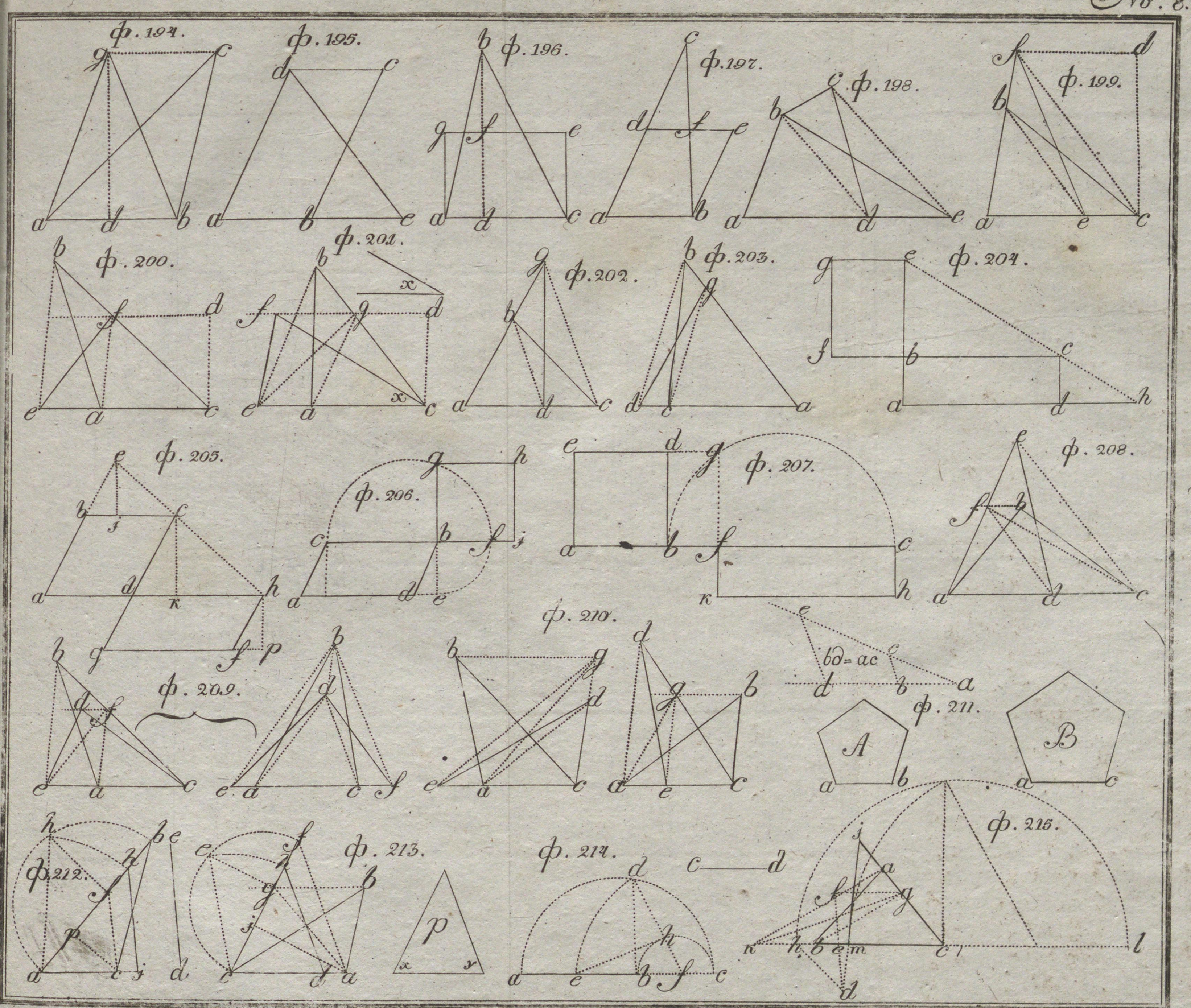


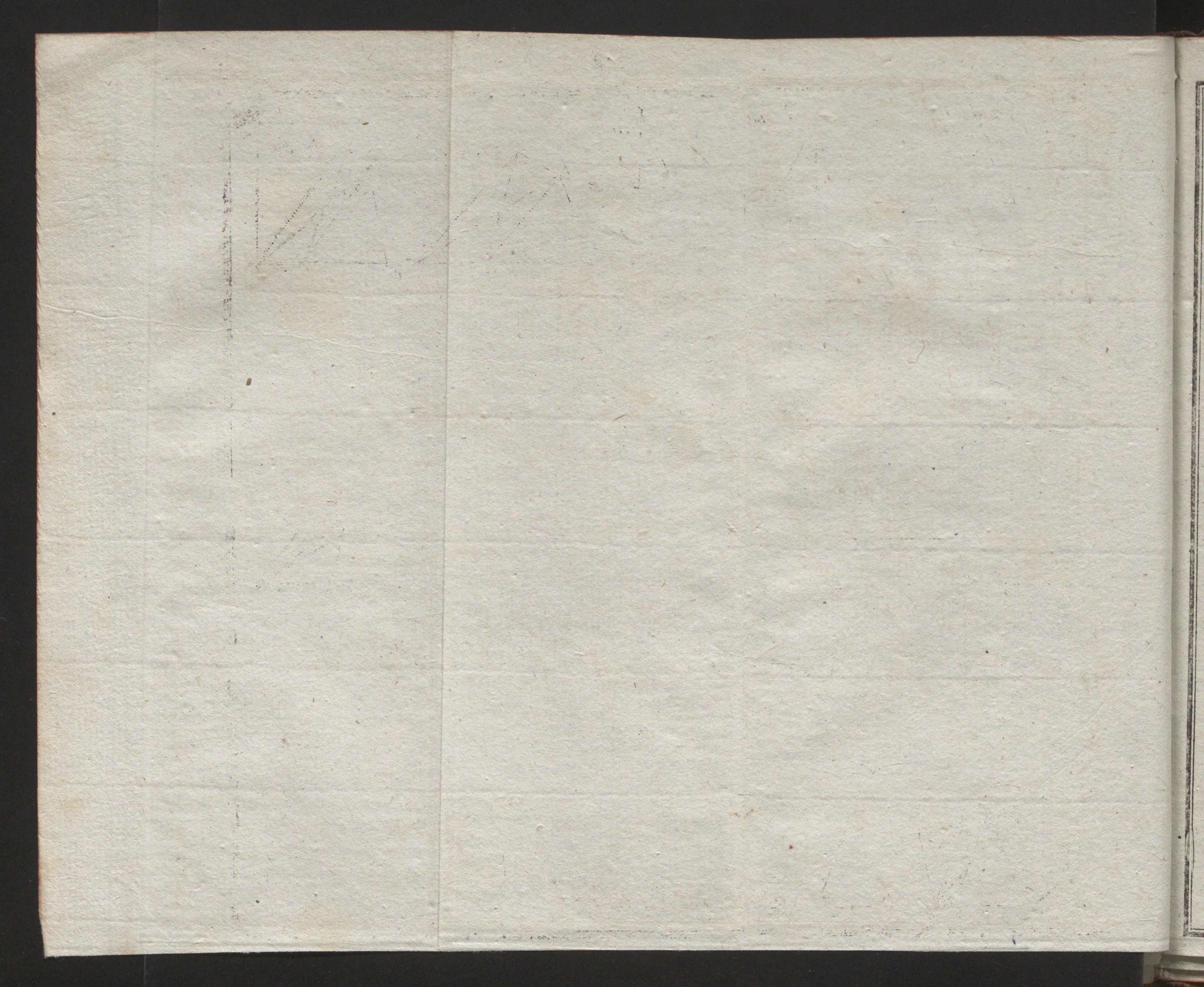

ф.151.
ф152
ф153
ф154
ф.155.
ф156
ф157
ф158
ф159
ф.160.
ф161
ф162
ф.163.
ф.164.
ф165
ф166
ф.167.
ф168
ф169
ф170
ф.171
ф.172
ф173

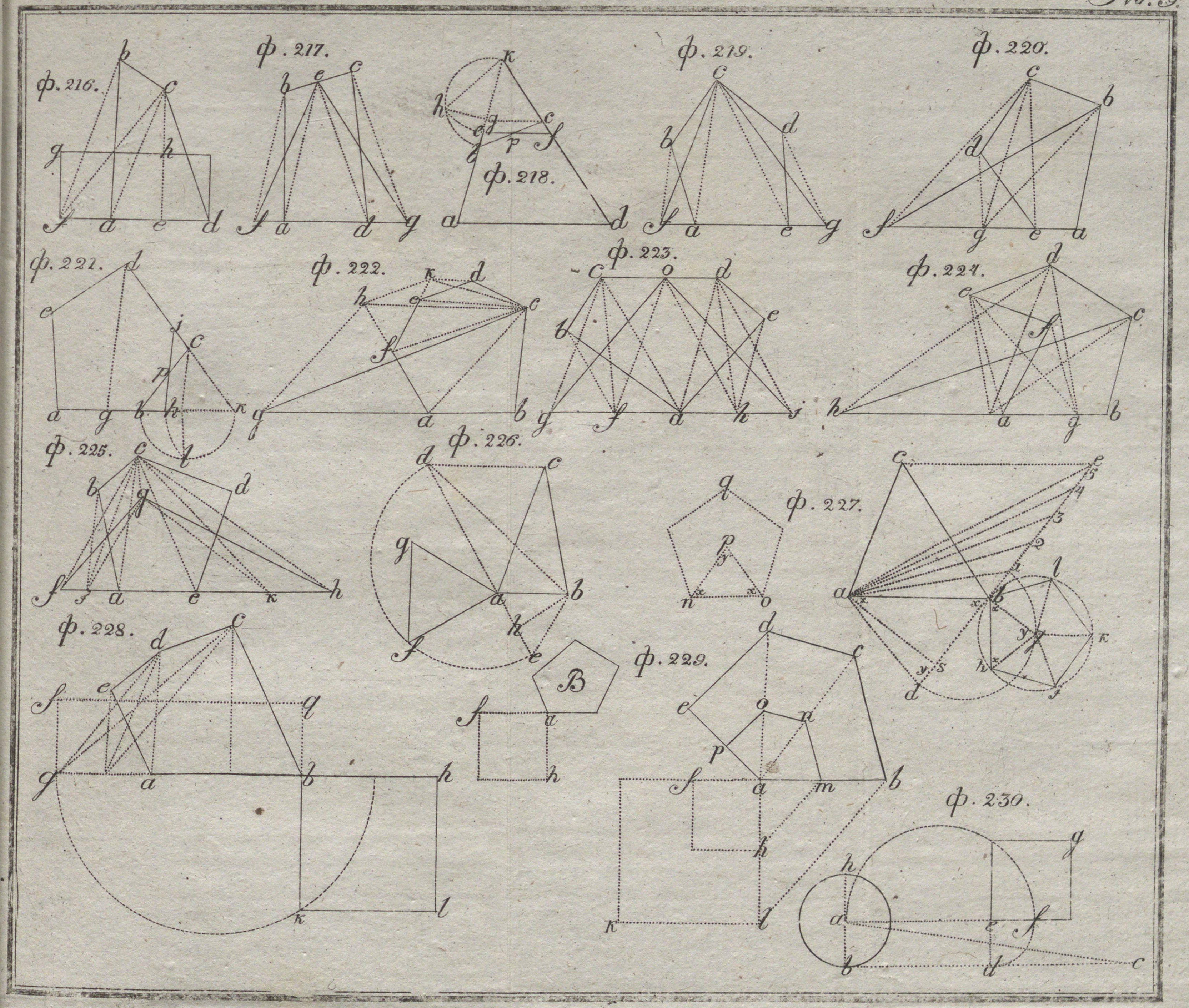


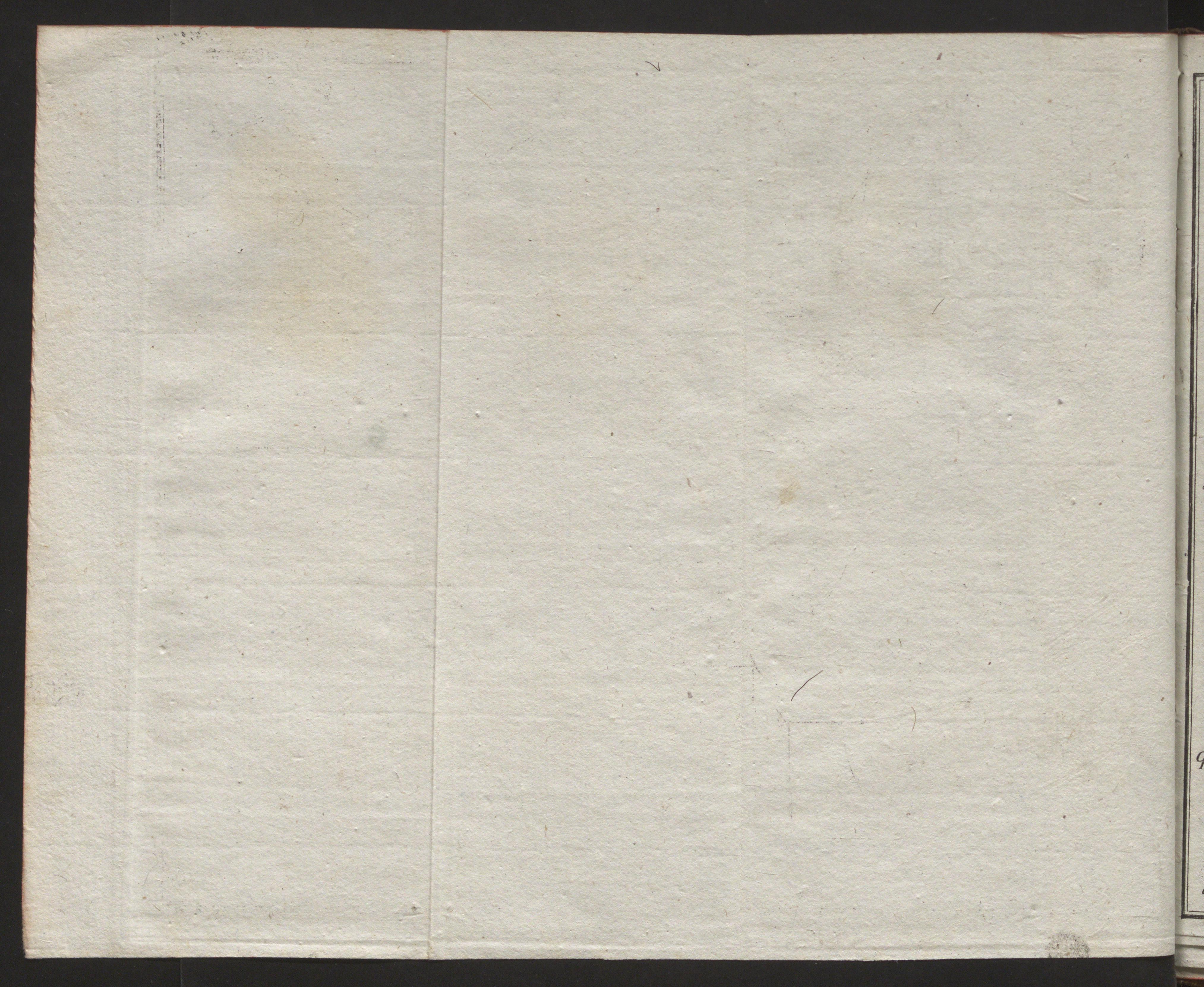

ф.174.
ф.175.
ф.176
ф.177
ф.178
ф.181.
ф.180.
ф.179.
ф.182.
ф.184
ф.183
ф.185.
ф.186.
ф.187.
ф.188.
ф.189.
ф.190.
ф.191.
ф.192.
ф.193

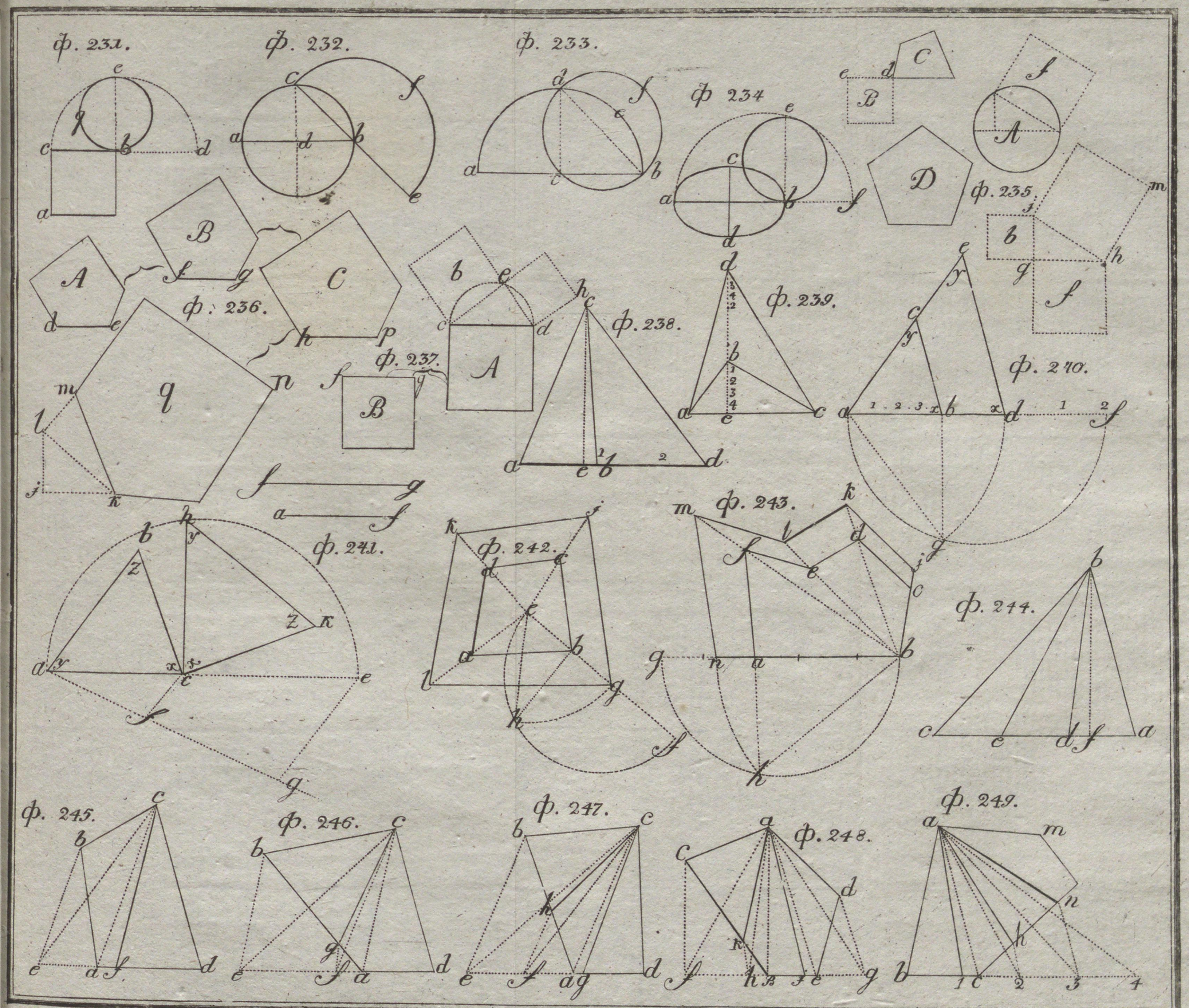


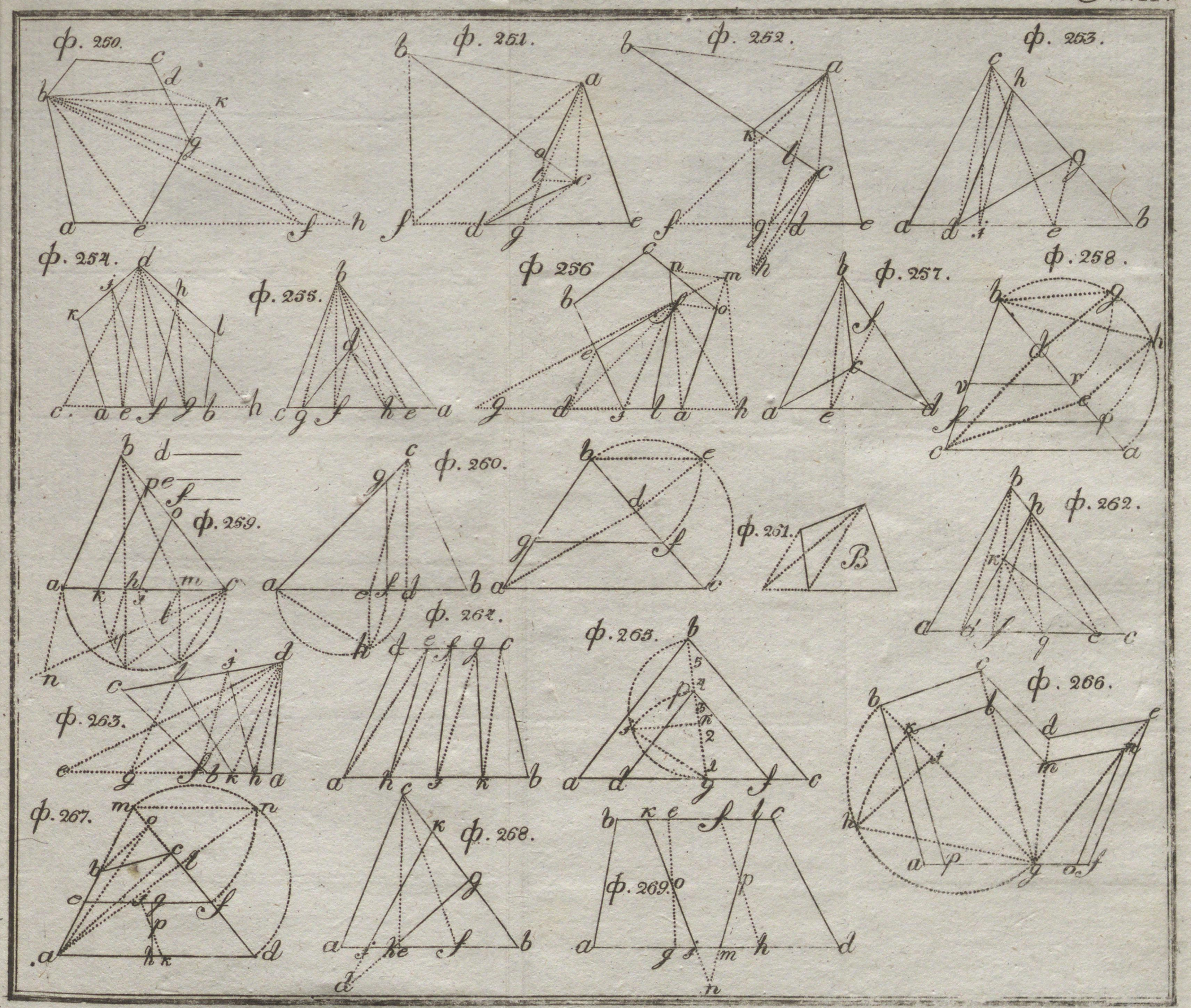

ф. 194.
ф. 195.
ф. 196.
ф. 197.
ф. 198.
ф. 199.
ф. 200.
ф. 201.
ф. 202.
ф. 203.
ф. 204.
ф. 205.
ф. 206.
ф. 207.
ф. 208.
ф. 209.
ф. 210.
bd = ac
ф. 211.
A
B
ф. 212.
ф. 213.
P
ф. 214.
c——d
ф. 215.

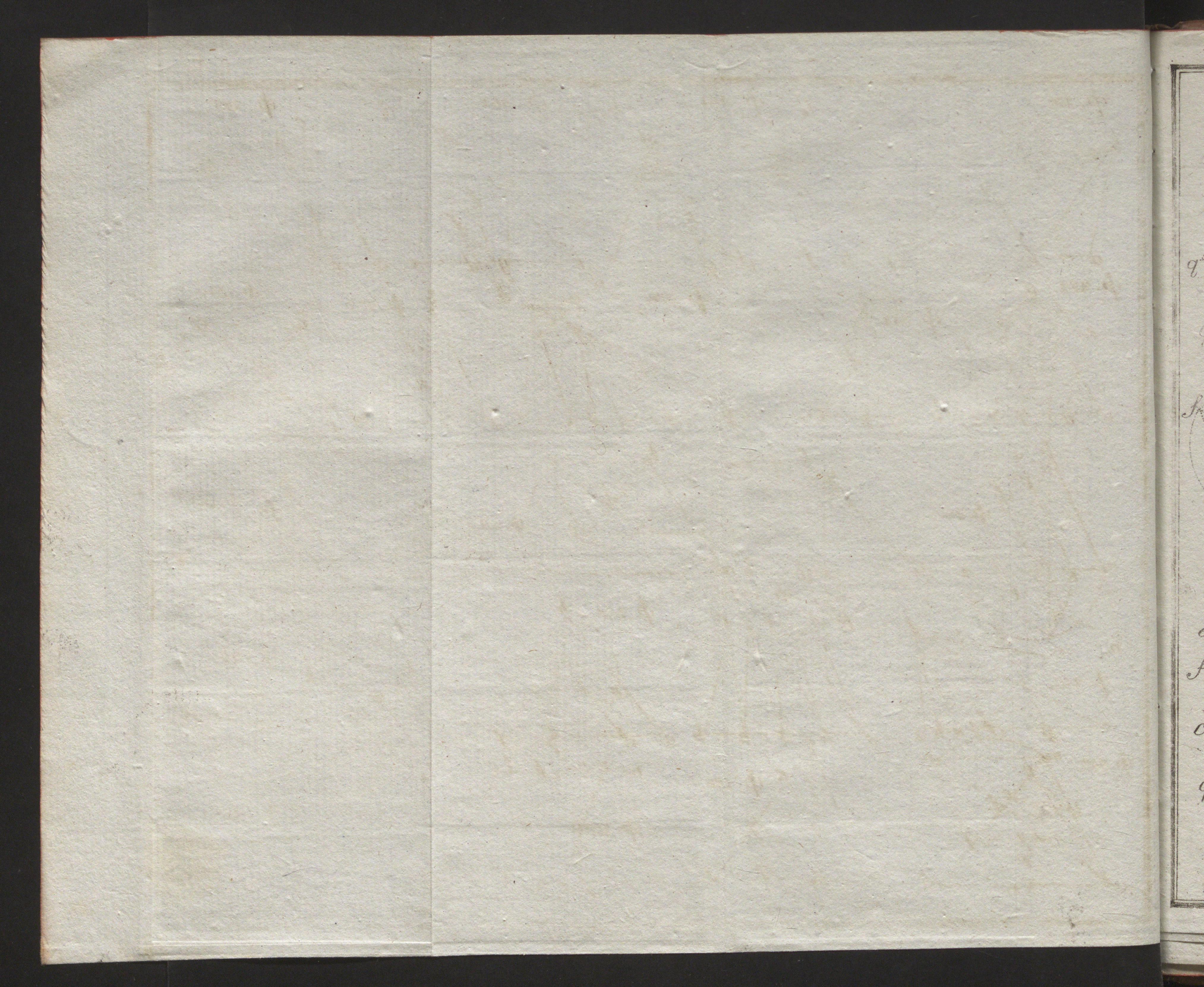


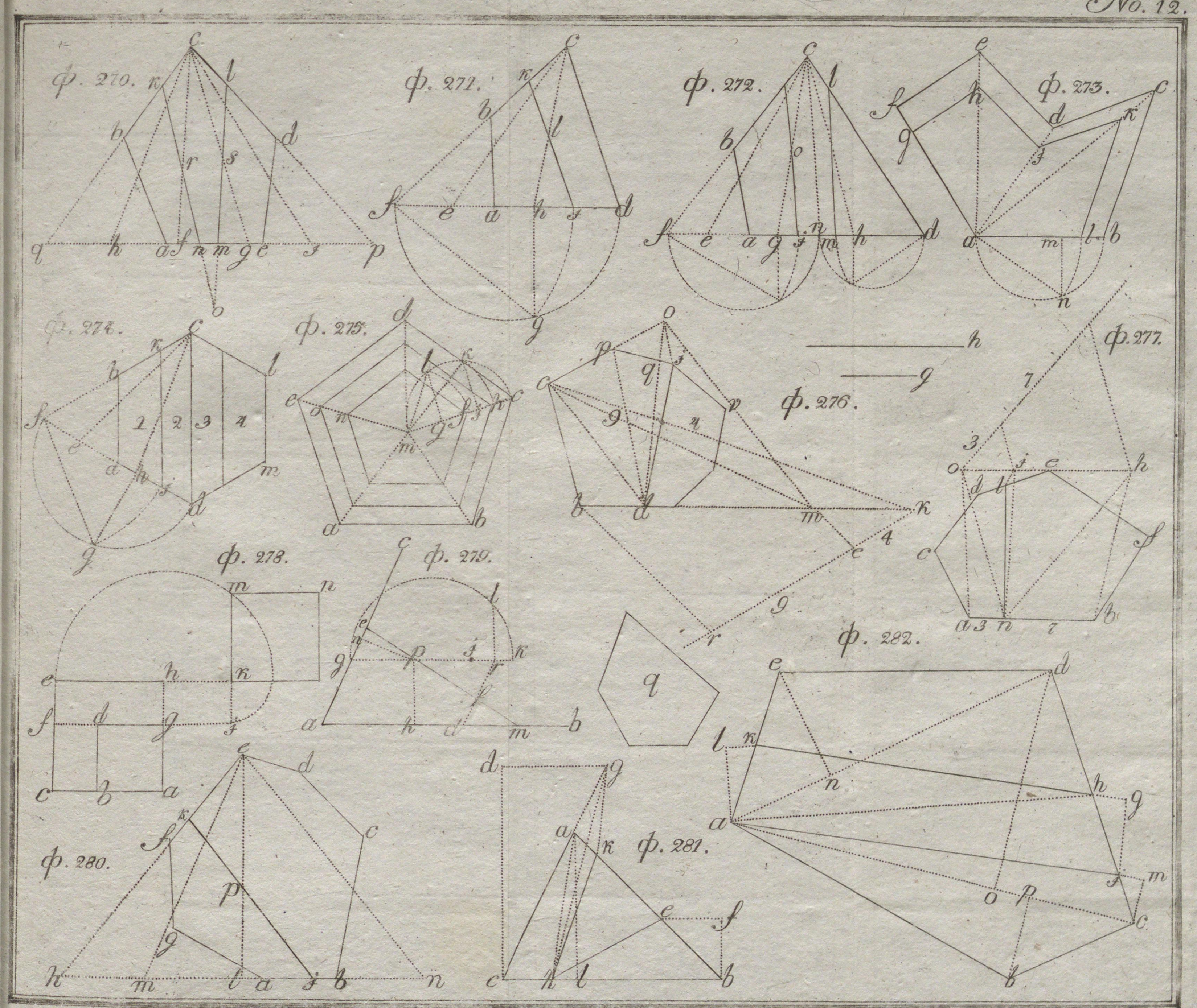

№. 9.
ф. 216.
ф. 217.
ф. 218.
ф. 219.
ф. 220.
ф. 221.
ф. 222.
ф. 223.
ф. 224.
ф. 225.
ф. 226.
ф. 227.
ф. 228.
B
ф. 229.
ф. 230.

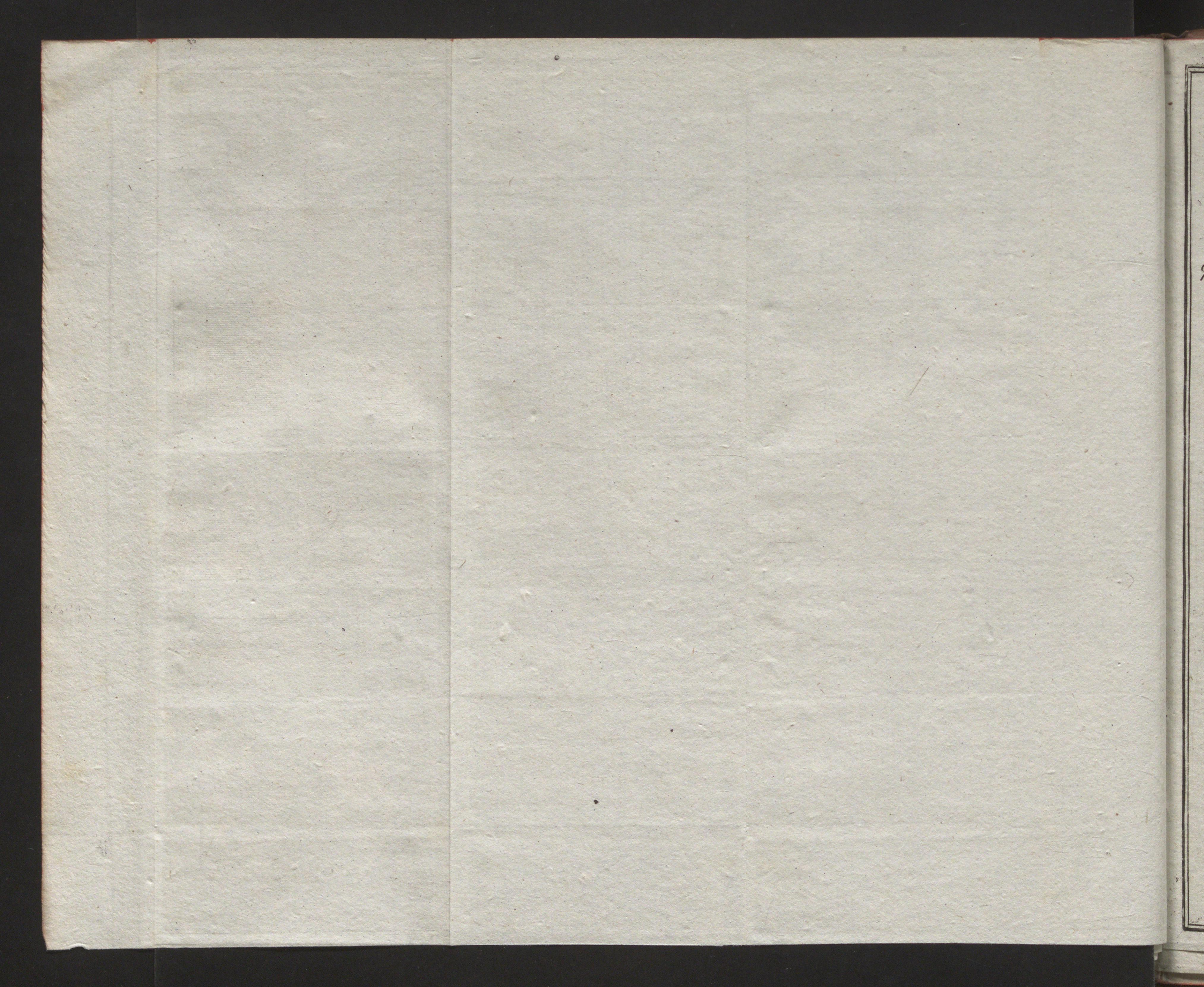


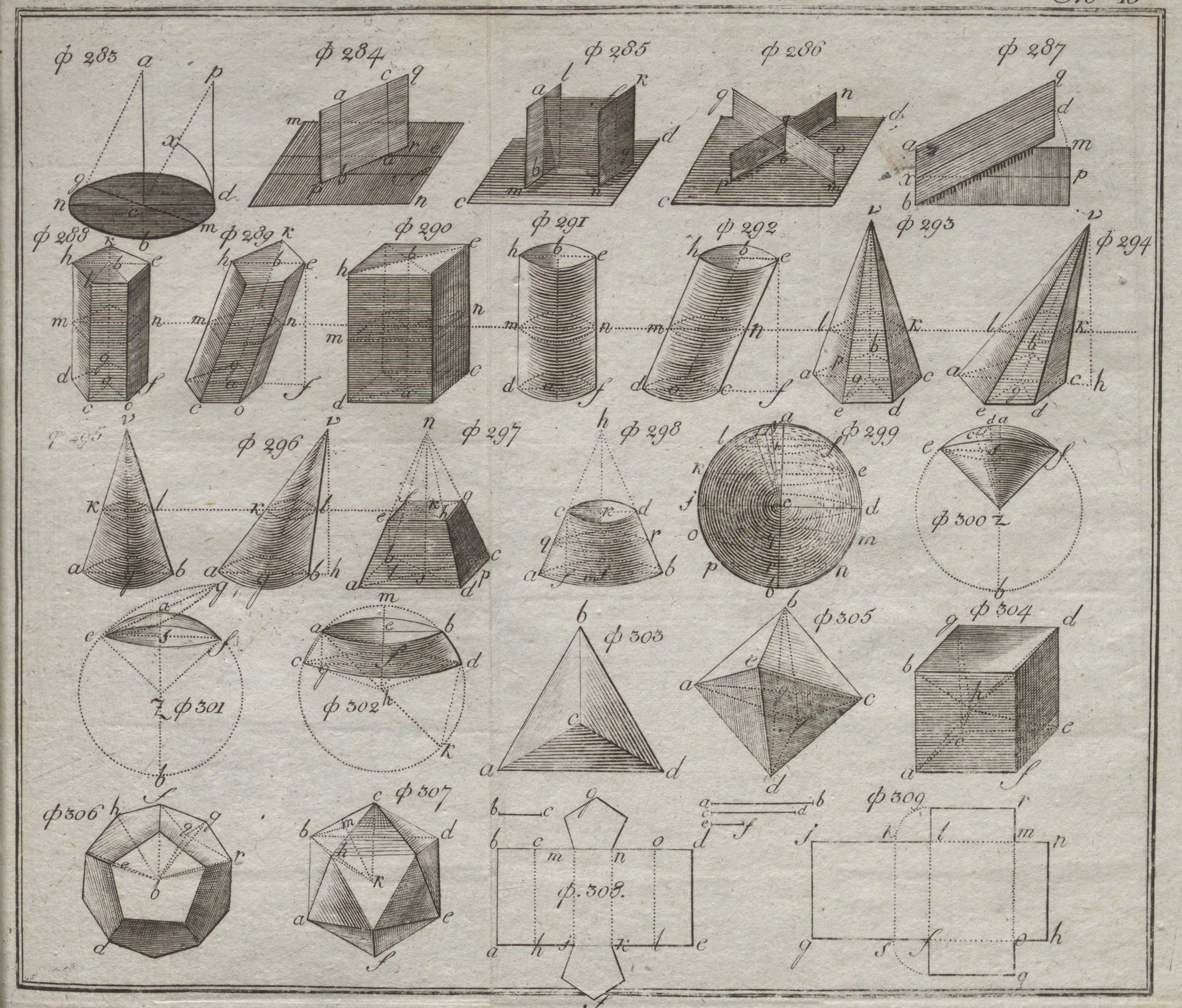

ф. 231.
ф. 232.
ф. 233.
ф 234
ф. 235
ф. 236.
ф. 237.
ф. 238.
ф. 239.
ф. 240.
ф. 241.
ф. 242.
ф. 243.
ф. 244.
ф. 245.
ф. 246.
ф. 247.
ф. 248.
ф. 249.

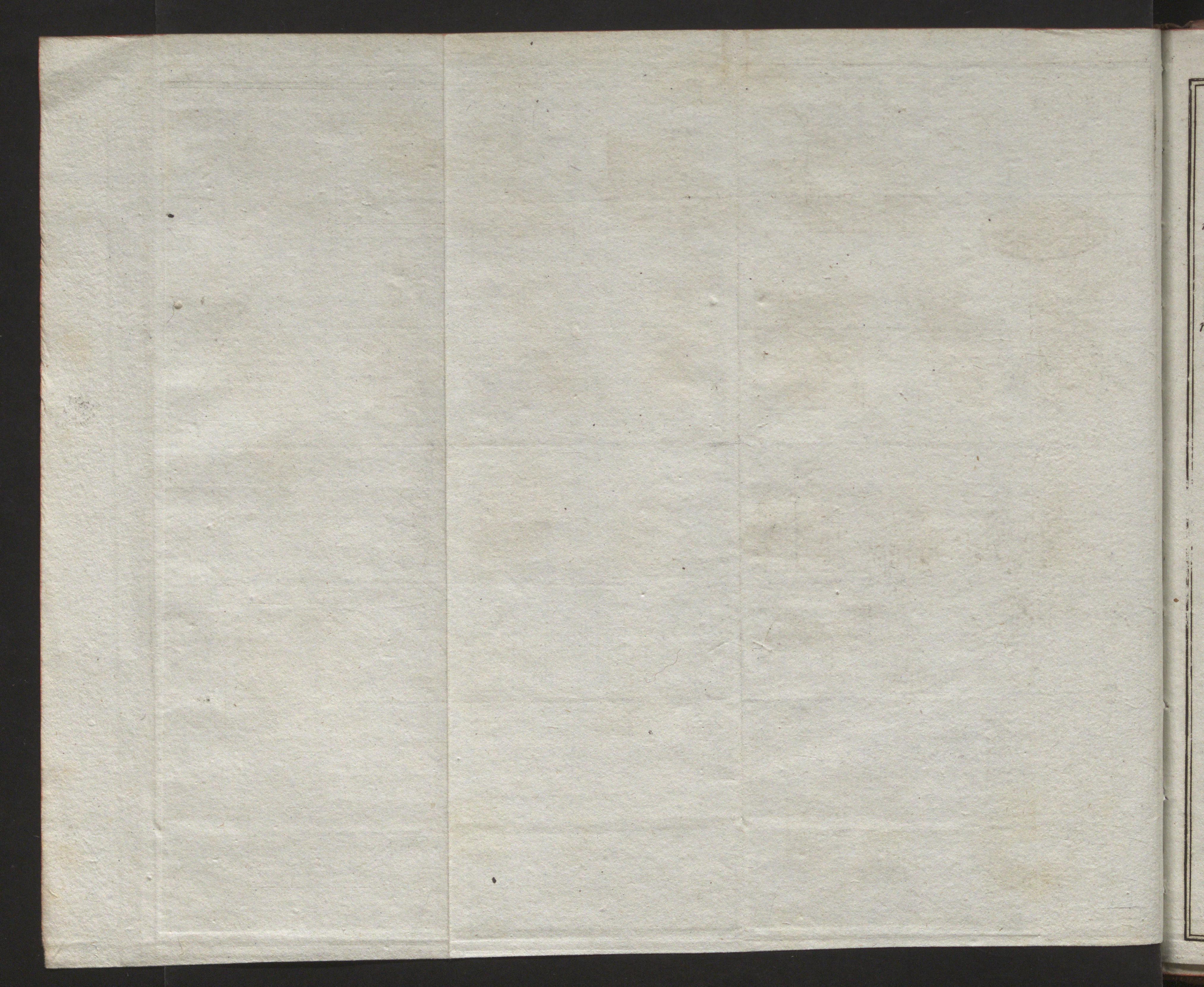

ф. 250.
ф. 251.
ф. 252.
ф. 253.
ф. 254.
ф. 255.
ф 256
ф. 257.
ф. 258.
ф. 259.
ф. 260.
ф. 261.
ф. 262.
ф. 263.
ф. 264.
ф. 265.
ф. 266.
ф. 267.
ф. 268.
ф. 269.

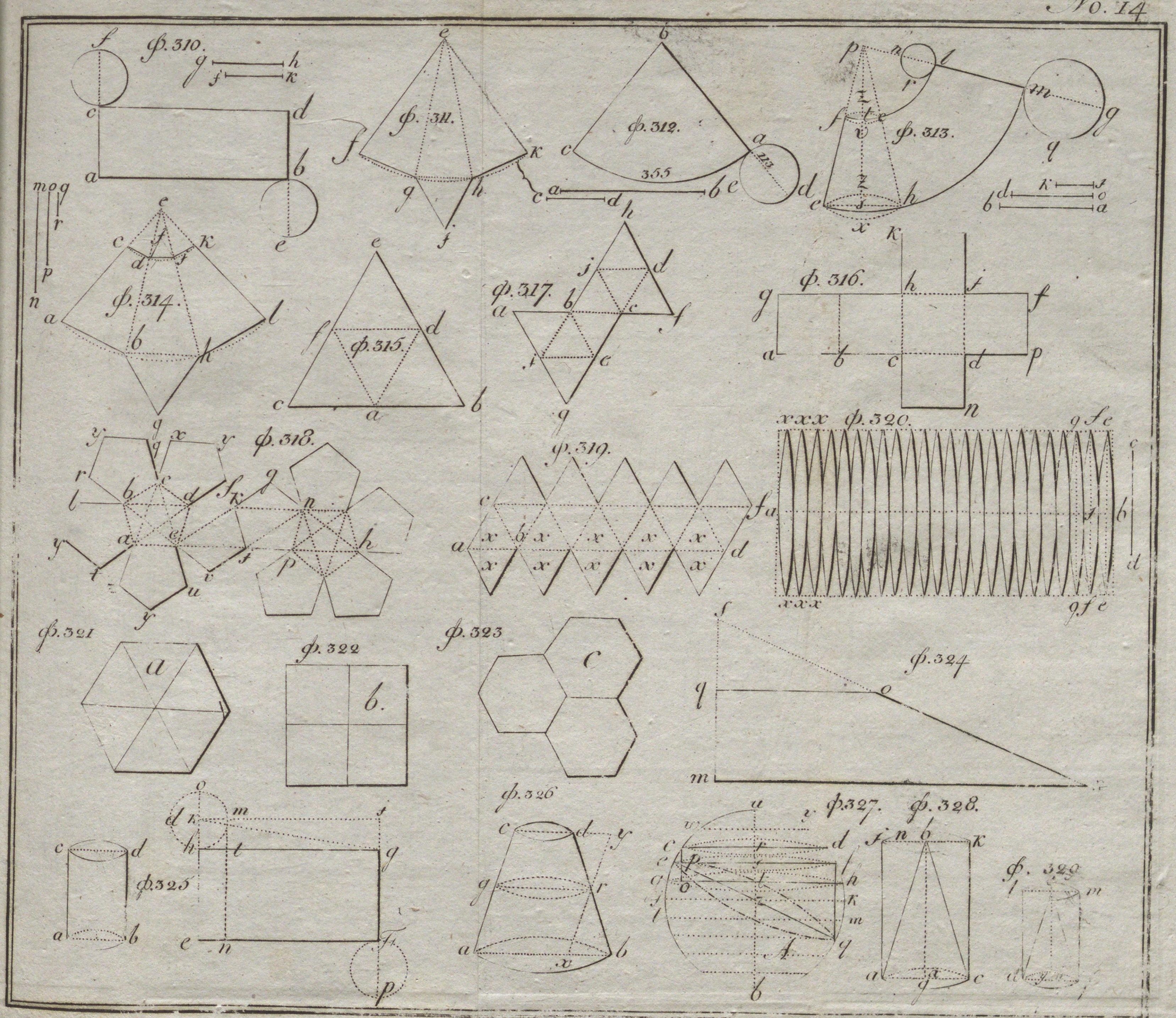


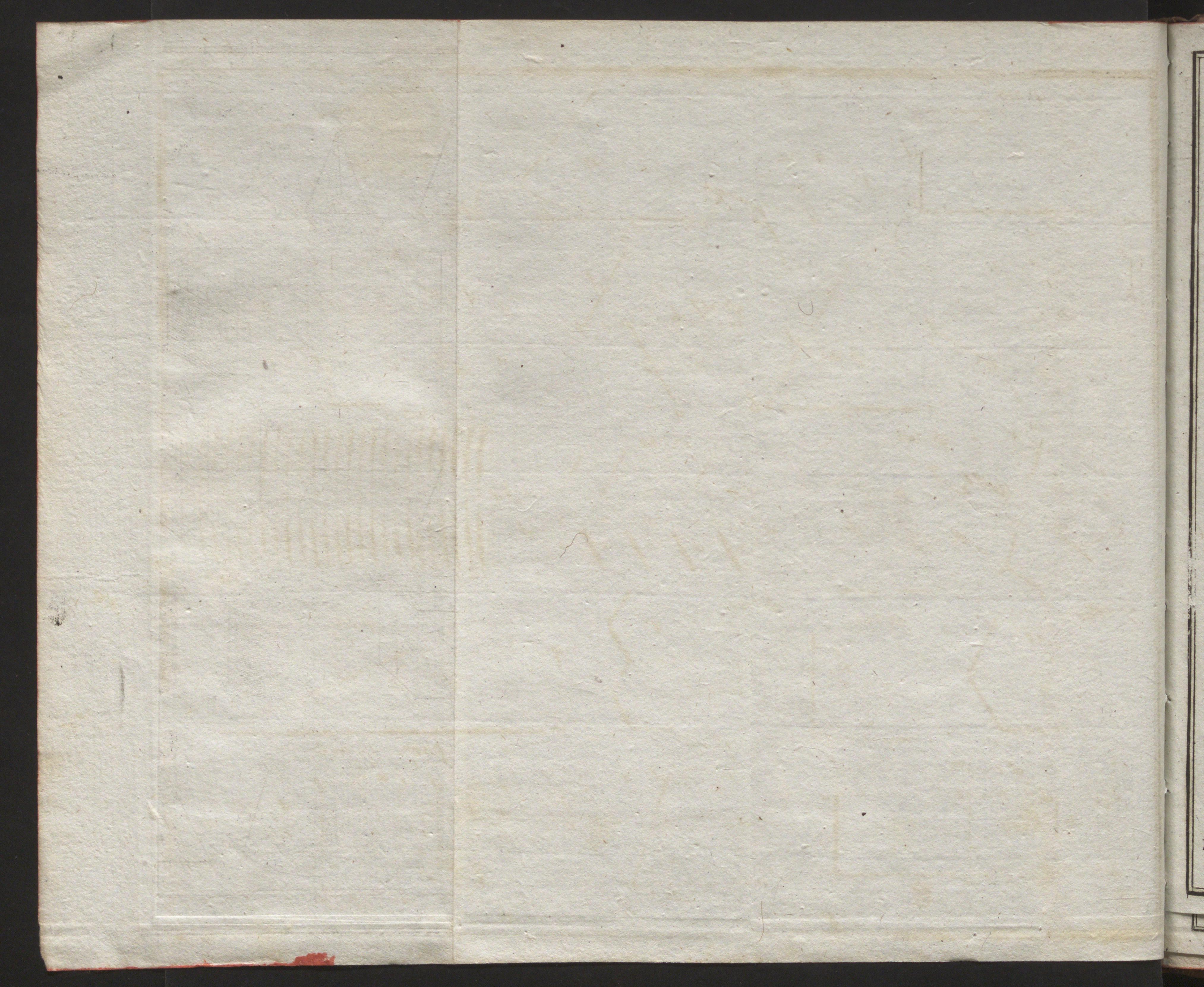

ф. 270.
ф. 271.
ф. 272.
ф. 273.
ф. 274.
ф. 275.
ф. 276.
ф. 277.
ф. 278.
ф. 279.
ф. 280.
ф. 281.
ф. 282.

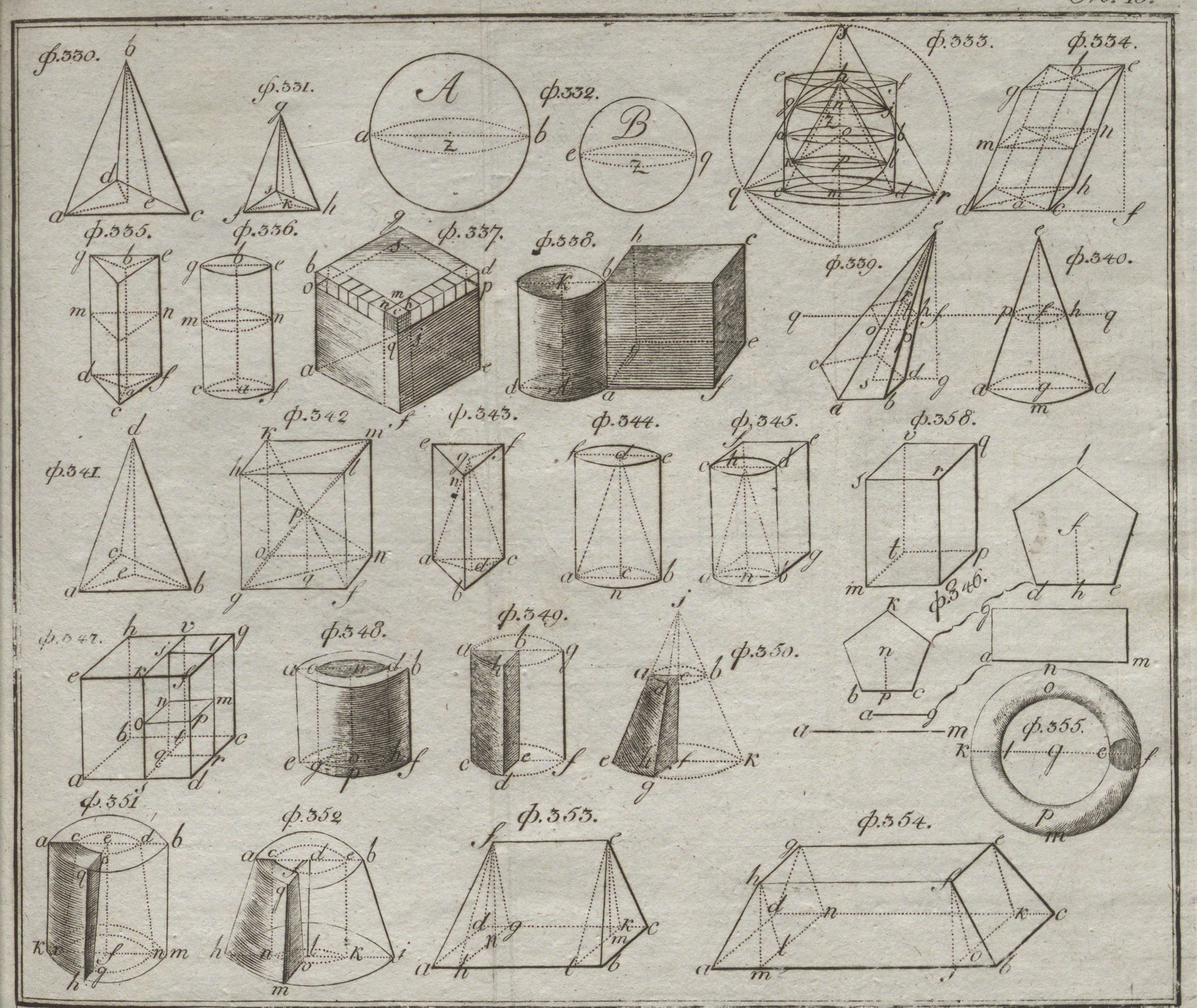



φ 283
φ 284
φ 285
φ 286
φ 287
φ 288
φ 289
φ 290
φ 291
φ 292
φ 293
φ 294
φ 296
φ 297
φ 298
φ 299
φ 300
φ 301
φ 302
φ 303
φ 304
φ 305
φ 306
φ 307
φ. 308.
φ 309

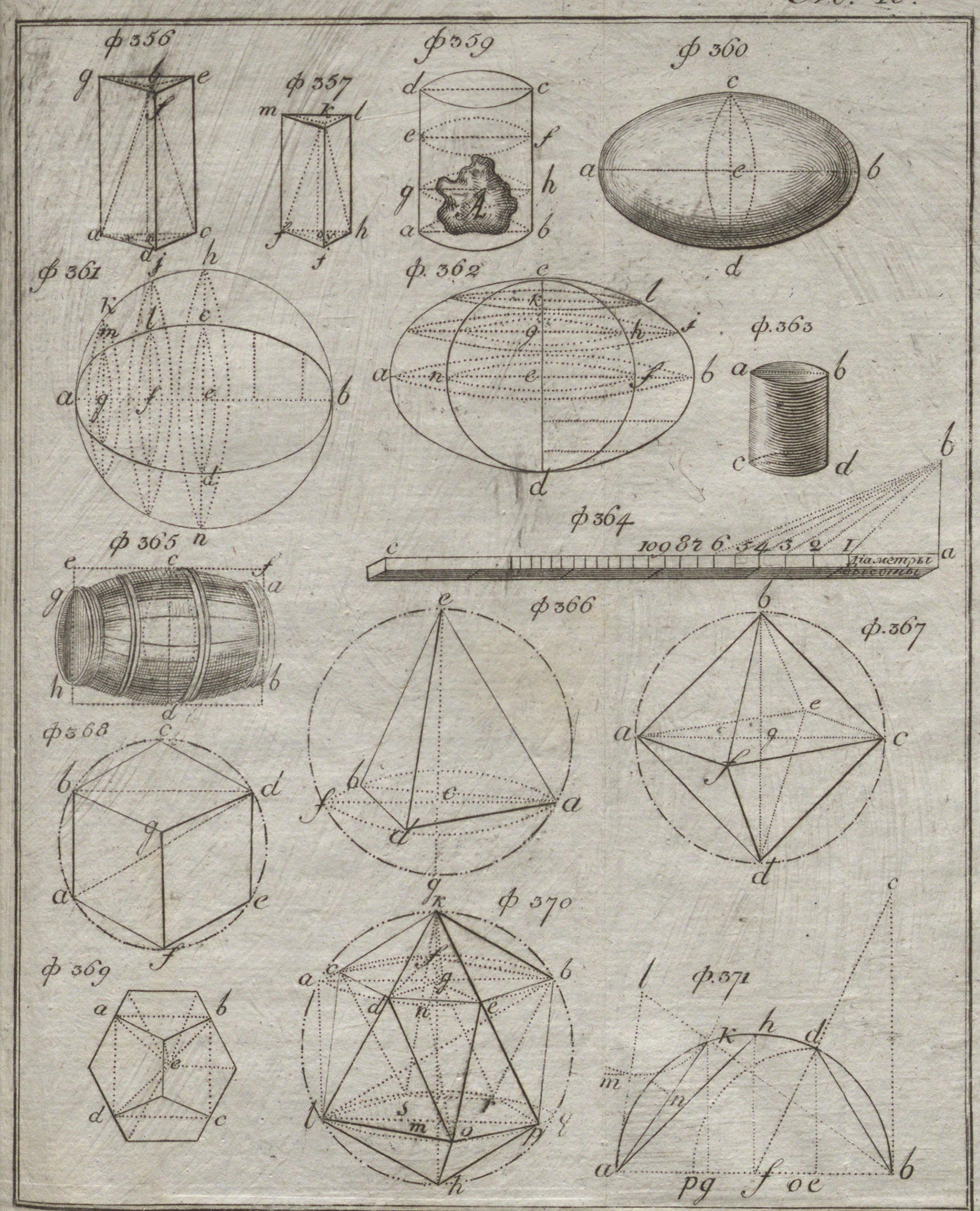



ф. 310.
ф. 311.
ф. 312.
355
ф. 313.
ф. 314.
ф. 315.
ф. 317.
ф. 316.
ф. 318.
ф. 319.
ф. 320.
ф. 321
ф. 322
ф. 323
ф. 324
ф. 325
ф. 326
ф. 327.
ф. 328.
ф. 329




ф.330.
ф.331.
A
ф.332.
B
ф.333.
ф.334.
ф.335.
ф.336.
ф.337.
ф.338.
ф.339.
ф.340.
ф.341.
ф.342
ф.343.
ф.344.
ф.345.
ф.358.
ф.346.
ф.347.
ф.348.
ф.349.
ф.350.
ф.355.
ф.351
ф.352
ф.353.
ф.354.

No. 16.


ф 356
ф 357
ф 359
ф 360
ф 361
ф. 362
ф.363
ф 364
Діаметры
Высоты
ф 365
ф 366
ф.367
ф 368
ф 369
ф 370
ф.371

ф: 372.

ф: 373.

ф: 374.

ф: 375.

ф: 376.

ф: 377.

ф: 378.

ф: 379.

ф: 380.

ф: 381.

ф: 382.

ф: 383.

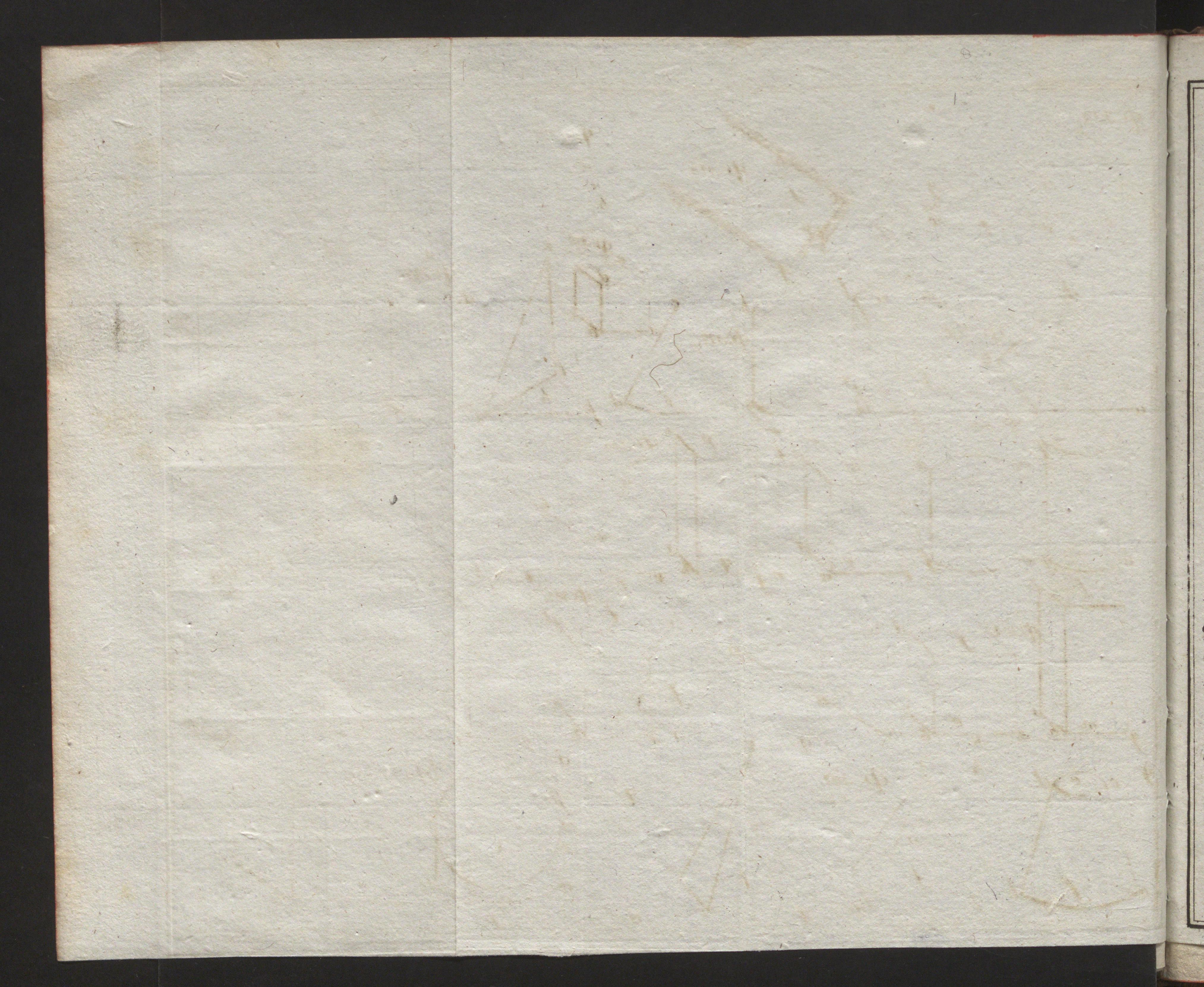
ф: 384.

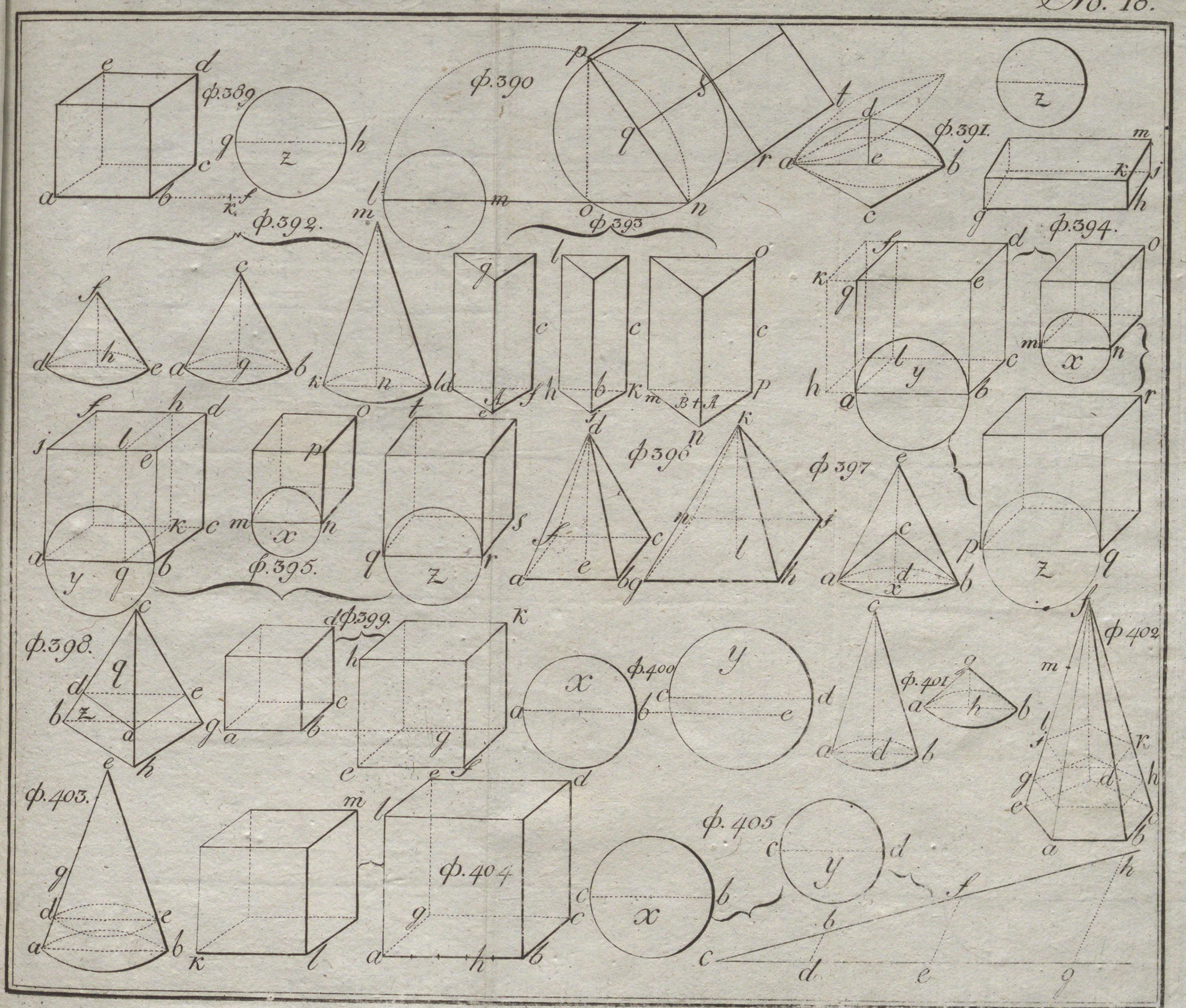
ф: 385.

ф: 386.

ф: 387.

ф: 388.




φ.389
φ.390
φ.391
φ.392
φ.393
φ.394
φ.395
φ.396
φ.397
φ.398
φ.399
φ.400
φ.401
φ.402
φ.403
φ.404
φ.405

